Föreläsning 12, del. a

Räkneregler för bestämda integraler (3.4)

- Räkneregler motsvarande dem för integraler av trappfunktioner (linearitet, ...) se boken!
- Integralkalkylens medelvärdessats
- Analysens huvudsats
- Insättningsformeln $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Sats Anta att f och g är integrerbara funktioner på $[a, b]$. Då är $f+g$ och Cf, där C är en konstant, också integrerbara och följande räkneregler gäller:

(1) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\int_a^b C f(x)\,dx = C \int_a^b f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(för alla c sådana att integralerna i högerledet är definierade, även $c \notin [a, b]$)

(4) $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

om $f(x) \leq g(x)$ för alla $x \in [a, b]$

Anm (1) + (2) = linearitet!

Ex Vilket av talen $\int_0^2 x^3\,dx$ och $\int_1^2 x^2\,dx$ är störst? Vi testar att uppskatta $\int_0^2 x^3\,dx$ neråt för att se om vi får $\int_1^2 x^2\,dx$:

$$\int_0^2 x^3\,dx = (3) = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x^3\,dx \geq$$

(enligt (4) eftersom $x^3 \geq 0$ för alla $x \in [0, 1]$)

$$\geq \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 x^3\,dx = \int_1^2 x^3\,dx \geq$$

(enligt (4) eftersom $x^3 \geq x^2$ för alla $x \in [1, 2]$)

$$\geq \int_1^2 x^2\,dx$$

Alltså är $\int_0^2 x^3\,dx$ större än (eller lika med) $\int_1^2 x^2\,dx$!