Föreläsning 14, del d

Separabla diffekvationer (5.2)

En diffekvation av första ordningen som kan skrivas $g(y(x))\,y'(x) = f(x)$, där f och g är kända funktioner, kallas separabel (vi kan separera x från y).

Kan också skrivas $y'(x) = f(x)\dfrac{1}{g(y(x))}$

Ex) Är diffekvationen $xy' = y^2 \sin x$ separabel?

$$xy' = y^2 \sin x \Leftrightarrow y' = \frac{\sin x}{x} y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} y' = \frac{\sin x}{x}$$

Ja, om vi sätter $g(y) = \dfrac{1}{y^2}$ och $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ så kan den skrivas $g(y)\,y' = f(x)$. Separabel!

Ex) Är diffekvationen $xy' = y^2 + \sin x$ separabel?

$$xy' = y^2 + \sin x \Leftrightarrow y' = \frac{y^2 + \sin x}{x}$$

Högerledet $\dfrac{y^2 + \sin x}{x}$ kan inte skrivas som en produkt av en funktion $f(x)$ och en funktion $\dfrac{1}{g(y(x))}$ så den är inte separabel!

Vi löser separabla diffekvationer genom att använda kedjeregeln baklänges:

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = G'(y(x))\,y'(x)$$

Om nu G är en primitiv funktion till g, och $g(y(x))\,y'(x) = f(x)$, så får vi

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = G'(y(x))\,y'(x) = g(y(x))\,y'(x) = f(x)$$

och genom att sedan integrera med avseende på x:

$$G(y(x)) = \int f(x)\,dx$$

Till sist: lös ut y ur G (om möjligt)!

Ex) Lös diffekvationen $e^{2y(x)} y'(x) = x$!

Sätt $g(y(x)) = e^{2y(x)}$ och $G(y(x)) = \frac{1}{2} e^{2y(x)}$

Då får vi $\dfrac{d}{dx} G(y(x)) = \frac{1}{2} e^{2y(x)} (2y'(x)) = x$

och $\frac{1}{2} e^{2y(x)} = G(y(x)) = \int x\,dx = \frac{1}{2} x^2 + C$

$$\Leftrightarrow e^{2y(x)} = x^2 + 2C \Leftrightarrow \underline{y(x) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 2C\right)}$$

(Vi kan också skriva $e^{2y} \dfrac{dy}{dx} = x \Leftrightarrow e^{2y}\,dy = x\,dx$ och sedan sätta integraltecken framför:

$$\int e^{2y}\,dy = \int x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{2y} = \frac{1}{2} x^2 + C \;)$$