Föreläsning 15, del a

Linjära diffekvationer av första ordningen (5.3)

Kom ihåg från förra gången:

Betrakta en första ordningens diffekvation $y' = h(x,y)$ där h är en funktion av x och y (och $y = y(x)$ är i sin tur en funktion av x, som vi vill bestämma).

Om högerledet kan faktoriseras $h(x,y) = f(x)g(y)$ i en produkt av en funktion f av x, och en funktion g av y, så är diffekvationen separabel.

Ex

$y' = x^2(y+1)$	separabel !
$y' = \sqrt{y} + 2xy$	ej separabel !
$y' = \frac{3y}{\ln x}$	separabel !
$y' = e^x + \sin y$	ej separabel !

Specialfall av separabla diffekvationer:

- $y' = f(x)$ Allmän lösning: $y(x) = F(x) + C$ där F är en primitiv funktion till f.
- $y' = y$ Allmän lösning: $y(x) = Ce^x$

Ett något mer komplicerat specialfall:

$y' = f(x)\,y, \quad y > 0$

Anta att F är en primitiv funktion till f.

Vi löser denna diffekvation enligt receptet förra gången:

- Flytta över funktionen av y till vänsterledet så att funktionen av x är ensam i högerledet:

$$y' = f(x)\,y \iff \frac{1}{y}\,y' = f(x)$$

- Integrera funktionen av y som multiplicerar y':

$$\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y}$$

Faktorn y' dyker upp som en inre derivata!

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln y = \left(\frac{d}{dy}\ln y\right)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\,y'$$

Diffekvationen blir alltså $\frac{d}{dx}\ln y = f(x)$

- Integrera båda leden med avseende på x:

$$\frac{d}{dx}\ln y = f(x) \iff \ln y = F(x) + C$$

- Lös ut y!

$$\ln y = F(x) + C \iff y = e^{F(x)+C} = e^C e^{F(x)}$$

Föreläsning 15, del b

Vi får alltså de positiva lösningarna $y(x) = e^C e^{F(x)}$ till den separabla differentialekvationen $y'(x) = f(x)y(x)$ genom att använda kedjeregeln baklänges.

Just denna separabla differentialekvation kan vi även lösa genom att använda produktregeln baklänges!

Multiplicera båda leden med $e^{-F(x)}$:

$$y'(x) = f(x)y(x) \Leftrightarrow e^{-F(x)}y'(x) = e^{-F(x)}f(x)y(x)$$

Flytta över så att vi får noll i högerledet:

$$e^{-F(x)}y'(x) - e^{-F(x)}f(x)y(x) = 0$$

Nu känner vi igen vänsterledet som derivatan av produkten $e^{-F(x)}y(x)$!

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-F(x)}y(x)\right) = \left(\frac{d}{dx}e^{-F(x)}\right)y(x) + e^{-F(x)}y'(x) =$$

$$= e^{-F(x)}\left(-F'(x)\right)y(x) + e^{-F(x)}y'(x) =$$

$$= -e^{-F(x)}f(x)y(x) + e^{-F(x)}y'(x)$$

Differentialekvationen blir alltså

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-F(x)}y(x)\right) = 0$$

Integrera båda leden!

$$e^{-F(x)}y(x) = B$$ ← konstant!

Multiplicera båda leden med $e^{F(x)}$!

$$e^{-F(x)}y(x) = B \Leftrightarrow y(x) = Be^{F(x)}$$

Vi får alltså den allmänna lösningen $y(x) = Be^{F(x)}$, som stämmer överens med $y(x) = e^C e^{F(x)}$ för $y > 0$ (med $B = e^C$).

Metoden att multiplicera med $e^{-F(x)}$, där F är en primitiv funktion till f, fungerar också för att lösa differentialekvationer av typen

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

En sådan differentialekvation kallas linjär (av första ordningen). Om $g(x) = 0$ homogen, annars inhomogen. Funktionen $e^{-F(x)}$ kallas integrerande faktor.

Föreläsning 15, del c

Ex Lös differentialekvationen $xy' = e^{x^2} + 2x^2 y$ med begynnelsevillkoret $y(1) = 1$.

Både y och y' förekommer direkt som faktorer i produkter med funktioner av x i var sin term (inga mer komplicerade uttryck, som till exempel y^2, $\sqrt{y'}$, yy', ...) - alltså är differentialekvationen linjär!

Det finns en term som varken innehåller y eller y' - alltså är den inhomogen (och därmed inte separabel).

- Vi börjar med att få y' fritt:

$$xy' = e^{x^2} + 2x^2 y \iff$$

$$y' = \frac{e^{x^2}}{x} + 2xy \qquad (\text{Vi antar } x > 0)$$

- Sedan flyttar vi över y-termen så att vi har termen utan vare sig y eller y' ensam i högerledet.

$$y' = \frac{e^{x^2}}{x} + 2xy \iff y' - 2xy = \frac{e^{x^2}}{x}$$

- Nu ska vi hitta en primitiv funktion till funktionen av x som multiplicerar y och exponentiera den. Resultat: den integrerande faktorn!

$$\int (-2x)\,dx = -x^2 + C$$

Integrerande faktor: e^{-x^2}

- Multiplicera med den integrerande faktorn:

$$y' - 2xy = \frac{e^{x^2}}{x} \iff e^{-x^2}(y' - 2xy) = e^{-x^2}\frac{e^{x^2}}{x} \iff$$

$$(-2xe^{-x^2})y + e^{-x^2}y' = \frac{1}{x}e^{x^2-x^2} \iff$$

$$\left(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right)y + e^{-x^2}\left(\frac{d}{dx}y\right) = \frac{1}{x} \iff \frac{d}{dx}(e^{-x^2}y) = \frac{1}{x}$$

- Integrera!

$$e^{-x^2}y = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

- Dividera med den integrerande faktorn för att lösa ut y:

$$y = e^{x^2}\ln x + Ce^{x^2}$$

- Begynnelsevillkoret ger $1 = e\ln 1 + Ce \iff C = e^{-1}$ och

$$\underline{y = e^{x^2}\ln x + e^{x^2-1}}$$

Föreläsning 15, del d

Vad innebär det att en differentialekvation är linjär?

En linjär differentialekvation av första ordningen kan skrivas $y'(x) - f(x)y(x) = g(x)$, eller

$$\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y(x) = g(x)$$

Operatorn $\frac{d}{dx} - f(x)$ är linjär, det vill säga uppfyller räknereglerna

$$\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right)\left(y_1(x) + y_2(x)\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y_1(x) + \left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y_2(x)$$

och $\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) k y(x) = k\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y(x)$

där k är en konstant.

Anta nu att $y(x) = y_1(x)$ är en lösning till

$y'(x) - f(x)y(x) = g_1(x)$

och att $y(x) = y_2(x)$ är en lösning till

$y'(x) - f(x)y(x) = g_2(x)$ $\longrightarrow$

Det följer då av lineariteten att

$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ är en lösning till

$y'(x) - f(x)y(x) = g_1(x) + g_2(x)$.

Speciellt innebär detta att om vi har hittat <u>en</u> lösning $y_p(x)$ till (den inhomogena) linjära differentialekvationen $y'(x) - f(x)y(x) = g(x)$ så kan vi alltid addera en lösning $y_h(x)$ till motsvarande <u>homogena</u> differentialekvation $y'(x) - f(x)y(x) = 0$ och få en ny lösning.

Och vi kan få <u>alla</u> lösningar till $y'(x) - f(x)y(x) = g(x)$ genom att addera alla lösningar till $y'(x) - f(x)y(x) = 0$ för om vi låter $y(x)$ vara en godtycklig lösning så får vi:

$$\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right)\left(y(x) - y_p(x)\right) = g(x) - g(x) = 0$$

Alltså är $y(x) - y_p(x)$ en lösning $y_h(x)$ till $\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y(x) = 0$ och därmed

$y(x) - y_p(x) = y_h(x) \Leftrightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Föreläsning 15, del e (demonstration testuppgifter)

5.5 (Se boken för uppgiftstext)

Lösning (inledning)

Låt $m(T)$ kg vara massan av den mängd salt som finns i tanken efter T timmar.

Volymen r m^3 saltlösning innehåller då $\frac{r}{V}m(T)$ kg salt. Detta är alltså massan av den mängd salt som flödar ut ur tanken per timme vid tiden T timmar.

Massan av den mängd salt som flödar in i tanken per timme är 0 kg i a) och $m_2 r$ kg i b) (konstant i båda fallen).

Inflöde minus utflöde ger:

a) $m'(T) = -\frac{r}{V}m(T)$

b) $m'(T) = m_2 r - \frac{r}{V}m(T)$

I båda fallen har vi begynnelsevillkoret

$m(0) = m_1$

a) Lösning: (forts.)

$$m' = -\frac{r}{V}m \iff m' + \frac{r}{V}m = 0 \iff$$

(Integrerande faktor: $e^{\frac{r}{V}T}$)

$$e^{\frac{r}{V}T}m' + \frac{r}{V}e^{\frac{r}{V}T}m = 0 \iff$$

$$\frac{d}{dT}\left(e^{rT/V}m\right) = 0 \iff$$

$$e^{rT/V}m = C \iff m = Ce^{-rT/V}$$

Begynnelsevillkoret $m(0) = m_1$ ger $C = m_1$ och

$m(T) = m_1 e^{-rT/V} \to 0$ då $T \to \infty$

Svar: $m_1 e^{-rT/V}$ kg salt finns kvar efter T timmar, och 0 kg efter lång tid.

b) Lösning: (forts.) På samma sätt:

$$\frac{d}{dT}\left(e^{rT/V}m\right) = m_2 r e^{rT/V} \iff e^{rT/V}m = Vm_2 e^{rT/V} + C$$

$$\iff m = Vm_2 + Ce^{-rT/V}$$

Begynnelsevillkoret ger $C = m_1 - Vm_2$ och

$m(T) = Vm_2 + (m_1 - Vm_2)e^{-rT/V} \to m_1$ då $T \to \infty$

Svar: $Vm_2 + (m_1 - Vm_2)e^{-rT/V}$ kg efter T timmar, Vm_2 kg efter lång tid