Föreläsning 9, del b

Partialbråksuppdelning: omskrivning av en rationell funktion $T(x)/N(x)$, där grad $T(x) <$ grad $N(x)$, som en summa av rationella funktioner $t(x)/n(x)$, där grad $t(x) <$ grad $n(x)$, och $n(x)$ är en faktor i $N(x)$. En sådan omskrivning är alltid möjlig!

Med hjälp av partialbråksuppdelning kan vi integrera rationella funktioner $T(x)/N(x)$ där nämnaren $N(x)$ är ett polynom av högre grad än 2!

Ex) Beräkna $\displaystyle\int \frac{3x^2+4}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$!

grad $(3x^2+4) = 2$

grad $(x^3+2x^2-x-2) = 3$

$2 < 3 \Rightarrow$ ingen polynomdivision behövs!

Vi faktoriserar $N(x) = x^3+2x^2-x-2$:

→

Vi prövar oss fram till $N(1) = N(-1) = N(-2) = 0$, så enligt algebrans fundamentalsats:

$$N(x) = (x-1)(x-(-1))(x-(-2)) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

(det hade räckt med att hitta ett nollställe, sedan kan man utföra polynomdivision för att hitta de andra två faktorerna, enligt faktorsatsen)

Vi vill alltså skriva

$$\frac{3x^2+4}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{T(x)}{N(x)} = \frac{t_1(x)}{n_1(x)} + \frac{t_2(x)}{n_2(x)} + \frac{t_3(x)}{n_3(x)}$$

där $n_1(x) = x-1$, $n_2(x) = x+1$, $n_3(x) = x+2$.

Men hur bestämmer vi $t_1(x)$, $t_2(x)$, $t_3(x)$?

Eftersom polynomet i täljaren måste ha lägre grad än polynomet i nämnaren, måste $t_1(x)$, $t_2(x)$, $t_3(x)$ ha grad noll, alltså vara konstanter. Vi ansätter

$t_1(x) = A$, $t_2(x) = B$, $t_3(x) = C$

och ser vad vi får!

→