Kontrollskrivning 1, CM1000 – Diskret matematik, hösten 2019 – Lösningar

1. Betrakta nedanstående härledning

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $r \to p \vee \neg q$

$\therefore \; r$

Om härledningen är korrekt, visa hur slutsatsen följer av premisserna genom att ange alla använda slutledningsregler för att komma till slutsatsen. Om slutsatsen inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som uppfyller premisserna men där den påstådda slutsatsen ändå inte gäller.

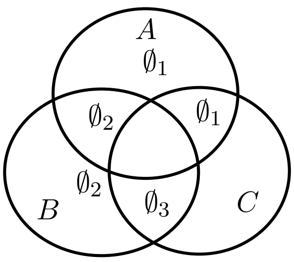
Lösning: En sanningstabell över de ingående premisserna har följande utseende:

p	q	r	1. $p \to q$	2. $q \to r$	$p \vee \neg q$	3. $r \to p \vee \neg q$	Uppfyllda premisser
s	s	s	s	s	s	s	1,2,3
s	s	f	s	f	s	s	1,3
s	f	s	f	s	s	s	2,3
s	f	f	f	s	s	s	2,3
f	s	s	s	s	f	f	1,2
f	s	f	s	f	f	s	1,3
f	f	s	s	s	s	s	1,2,3
f	f	f	s	s	s	s	1,2,3

Den sista raden visar att om alla utsagor p, q, r är falska så är alla premisser (1, 2 och 3) uppfyllda, men trots det är slutsatsen r (som också råkar vara en utsaga) *inte* uppfylld. Det betyder att slutledningen *inte* är korrekt och en tilldelning av sanningsvärden som uppfyller alla premisser men där slutsatsen trots detta inte är uppfylld är då alla p, q, r ges sanningsvärdet *falsk*.

2. Om vi kräver av tre mängder A, B, C att 1. $A \subset B$, 2. $B \subset C$ och 3. $C \subset A \cup B^c$, måste vi då alltid ha $C = \emptyset$? Om inte, ge exempel på tre mängder som uppfyller de givna kraven men där $C \neq \emptyset$.

Lösning: Formellt sett kan inte Venndiagram ingå som lösningar i en uppgift, men vi kan använda Venndiagram för att skapa en förståelse för en situation. De tre kraven på mängderna är delmängdsrelationer och vi kan symbolisera en delmängdsrelation i ett Venndiagram genom att ange att vissa fält är tomma i skriver då in $\emptyset$ i de fält som blir tomma då delmängdsrelationen är uppfylld. De tre kraven kan då symboliseras på följande sätt:



Det finns inte tre sorters tomma mängder, men vi har ändå noterat i figuren $\emptyset_1$, $\emptyset_2$ och $\emptyset_3$ för att symbolisera hur vi använder de tre kraven, till exempel ger krav 1. $A \subset B$ upphov till att de fält i Venndiagrammet som är betecknade med $\emptyset_1$ representerar delmängder som måste vara tomma.

Vi ser att många fält som bygger upp mängden C måste vara tomma – *men inte alla!* – det betyder att vi kan sätta in i element i de fält som inte är tomma och vara säkra på att vi uppfyller premisserna och konstruera en icke-tom mängd C tillsammans med två mängder A, B där alla tre uppfyller de tre kraven. En sådan uppsättning mängder är $A = \{1\}$, $B = \{1\}$ och $C = \{1, 2\}$ (rita gärna in elementen 1 och 2 i Venndiagrammet!)

$$\{1\} = A \subset B = \{1\}, \quad \{1\} = B \subset C = \{1, 2\} \quad \text{och} \quad C = \{1, 2\} \subset \{1\} \cup \{2\} = A \cup B^c$$

vilket alltså ger tre mängder som uppfyller premisserna men inte att $C = \emptyset$. (*Anmärkning:* Problemställningen har *precis* samma logiska struktur som uppgift 1. Det är alltså naturligt att vi inte heller i andra uppgiften kan dra en slutsats som gäller. Vi skulle också kunna ha nöjt oss med $A = B = \emptyset$ och $C = \{2\}$.)

3. Låt mängderna $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (alternativ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$) och $B = \{a, b, c, d\}$ vara givna och definiera funktionen $f : A \to B$ genom följande:

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, b)\}. \quad \text{alternativt } f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, b), (5, a)\}$$

Inför mängden $C \subset B$, där $C = f(A)$.

Det finns ingen funktion $h : C \to B$ som är bijektiv. Varför? Ändra i definitionen av funktionen f så att det finns en funktion $h : C \to B$ som är bijektiv. (Ändra dock inte på fs domän och kodomän så att vi fortfarande har $f : A \to B$.) Ange sedan en sådan funktion $h : C \to B$ som *är* bijektiv.

(Observera att det finns många frihetsgrader i den här uppgiften, det kan finnas många funktioner $h : C \to B$ som är bijektiva, bara f definieras på ett bra sätt – det gäller att förstå varför den första funktionen f inte fungerar. Observera också att frågan inte gäller om f är bijektiv eller inte, det är därför den alternativa definitionen av f finns där: om domänen och kodomänen till f har olika antal element så *kan inte* f vara bijektiv, hur den än definieras.)

Lösning: Med den nuvarande definitionen av f får Mängden C utseendet

$$C = f(A) = \{f((x) : x \in A\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{a, b, c, b\} = \{a, b, c\}$$

och detta är en mängd med 3 element (det blir samma mängd med 3 element om vi tar den alternativa definitionen av f). Eftersom det inte finnas några bijektioner mellan två ändliga mängder om mängderna inte har lika många element så finns alltså ingen funktion $h : C \to B$ som är en bijektion. Det är för få element i C. Men om vi ändrar defnitionen av f till

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

får vi

$$C = f(A) = \{f((x) : x \in A\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{a, b, c, d\} = B$$

och då råkar faktiskt C vara precis B. Då är det lätt att hitta en bijektion $h : C \to B$ eftersom vi då söker en bijektion $h : B \to B$ så identitetsfunktionen ι_B duger, det vill säga

$$h = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}.$$

(Eller kortare, $h(x) = x, \forall x \in C(= B)$.