UPPGIFTER FÖR EXAMINATION (FRÅN GAMLA TENTOR OCH KS:AR)

Organisation av materialet

Kursen i diskret matematik är indelad i nio stycken konkretiserade lärandemål. Dessa konkretiserade lärandemål är så kallade operationaliseringar av kursens så kallade *Intended Learning Outcomes*. Vi behöver inte fundera mer på sådana termer. Det enda ni behöver göra är att se denna samling som en bra sammanställning av vad ni som studenter behöver klara av för att få godkänt på kursen. De nio konkretiserade lärandemålen har nio motsvarande avsnitt i det här materialet.

Användning av materialet

Det bästa är att följa kursens undervisning och när du känner att du greppat ett område, prova att lösa några uppgifter ur det här materialet. Det finns lösningar till de flesta uppgifter, dock inte alla.

Det finns två typer av uppgifter: de som endast kräver ett svar av typen ”rätt” eller ”fel” och de som kräver fullständiga lösningar. Rätt-eller-feluppgifter kommer *inte* att förekomma på någon tentamen i framtiden, men kan vara ett sätt att snabbt få koll på om en grundläggande förståelse finns. Det finns rätt-och-feluppgifter hörande till avsnitten 1, 2 och 4 samt några enstaka rätt och feluppgifter hörande till några av de andra avsnitten. Samtliga uppgifter i det här materialet är hämtade från gamla tentor och kontrollskrivningar. Kontrollskrivningsuppgifterna har generellt en lite lättare karaktär men det finns undantag.

De konkretiserade lärandemålen

I kursplanen anges följande kursinnehåll:

(1) Grundläggande logik med logiska konnektiv och studier av giltig argumentation och bevismetoder.
(2) Inledande mängdlära med grundläggande mängdoperationer.
(3) Grundläggande talteori med bevismetoder såsom matematisk induktion och möjligtvis tillämpningar inom kryptering eller liknande intresseområden.
(4) Funktioner, speciellt använda för att formulera isomorfibegreppet för grafer.
(5) Relationer, partiella ordningar och ekvivalensrelationer med tillämpningar och exempel från talteorin inkluderande kongruensrelationen.
(6) Grafteori, isomorfibegreppet, träd, riktade grafer, matrisrepresentationern, eulerska kretsar och liknande begrepp. Studier av grafer för att modellera intressanta applikationer som till exempel att i en viktad graf finna minsta uppspännande träd och kortaste vägen mellan två noder.
(7) Grundläggande kombinatorik involverandes studier av multiplikationsprincipen, principen om inklusion och exklusion, binomialsatsen, permutationer och kombinationer.
(8) Grundläggande diskret sannolikhetslära med utfallsrum, betingad sannolikhet och oberoende händelser.

Det här är åtta mål, men de konkretiserade läromålen var nio, ett för varje kapitel i kurslitteraturen. Lösningen på detta är att den tredje punkten i kursinnehållet (från kursplanen) motsvaras av två kapitel och de uppgifter som kommer att förekomma på tentamen som behandlar detta område (talteori) kommer att vara av tvåslag: en hämtad få kapitel 4 och en hämtad från kapitel 6. Talteori är också en väldigt viktig del av kursen.

Genomgående kommer också bevisföring att examineras, det kommer att ske indirekt genom att väldigt många av uppgifterna som ges kommer att vara att just konstruera bevis eller härledningar.

Nu följer de nio avsnitten som innehåller alla uppgifter.

Uppgifter som hör till kapitel 1: LOGIK

Rätt-eller-felupggifter.

Uppgift 4 på tentamen från januari 2015

4. The proposition $(p \to (q \vee r)) \vee (\neg q \wedge \neg r)$ is always true.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från mars 2016

1. Följande slutledning är korrekt: 1. $p \vee q \vee r$ and 2. $\neg p \vee \neg q \Rrightarrow r$.

□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från april 2017

1. Om alla implikationerna $p \to q$, $q \to r$ och $r \to p$ gäller så är utsagorna (p, q, r) antingen alla sanna eller så är alla falska.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 2 på tentamen från januari 2017

2. För godtyckliga utsagor p, q, r gäller $p \to (q \vee r) \Leftrightarrow (p \to q) \vee r$ men inte $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge r$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 2 på tentamen från januari 2018

2. Om de tre implikationerna $p \to q$, $\neg r \to \neg q$ är sanna så gäller även $p \leftrightarrow q$ and $q \leftrightarrow r$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från april 2018

3. Låt p, q, r beteckna logiska utsagor. Om dessa implikationer gäller: $p \vee q \to r$, $q \vee r \to p$, $p \vee r \to q$, så gäller också $r \to p \wedge q$, $p \to q \wedge r$ och $q \to p \wedge r$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från januari 2019

4. Från $(p \to q) \wedge (q \to \neg p)$ kan vi dra slutsatsen $\neg p \wedge \neg q$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från april 2019

1. Låt p, q, r vara godtyckliga utsagor. Då är utsagan $(p \to q) \vee (r \to p)$ alltid sann.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 13 på tentamen från januari 2015

13. Visa att implikationen inte är associative, dvs visa att $(p \to q) \to r$ och $p \to (q \to r)$ inte är ekvivalenta utsagor.

Uppgift 1 på kontrollskrivning 1 från 2016

1. Är följande slutledning korrekt? Om den är korrekt ange hur slutsatsen följer av de olika premisserna med angivande av de olika slutledningsreglerna som används. Om slutledningen inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q och r som uppfyller premisserna men inte slutledningen. (Sanningstabell inte tillåten.)
   1. $p \to q$
   2. $q \to \neg r$
   3. $r \vee \neg q$

   $\therefore \neg p$

Uppgift 1 på kontrollskrivning 2 från 2017

1. Är nedanstående slutledning korrekt? Om den är korrekt visa hur slutsatsen följer av premisserna. Om slutledningen inte är korrekt ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q och r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen. (Sanningstabell är ok men lägg också till förklarande ord till sanningstabellen.)
   1. $p \to q$
   2. $q \to (\neg r \vee \neg p)$

   $\therefore \neg r \vee \neg p$

Uppgift 5 på tentamen från september 2018

5. Visa att följande två utsagor är ekvivalenta:
$$p \to (q \vee \neg r) \qquad \neg(\neg q \wedge r \wedge p)$$

Uppgift 1 på kontrollskrivning 1 från 2018

1. Betrakta nedanstående slutledning

1. $p \to q$
2. $q \to (s \wedge t)$
3. $s \to \neg t$

$\therefore \neg p$

Denna slutledning är antingen korrekt eller inte korrekt. Om den är korrekt visa hur slutsatsen följer av premisserna och ange då vilka grundläggande härledningsregler som används i varje steg (*Modus Ponens, etc.*). Om däremot slutledningen *inte* är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden till utsagorna p, q, s och t som uppfyller alla premisser men trots det inte uppfyller slutsatsen.

Uppgift 9 på tentamen från januari 2019

9. The following proposition is erroneous and the proof is also erroneous. Find all the errors and correct them. (**1p** for correcting the proposition and **2p** for correcting the proof.) (Följande påstående är felaktigt och beviset är också felaktigt. Finn alla fel och rätta dem. (**1p** för att rätta påståendet och **2p** för att rätta beviset.))

Proposition: For all statements p, q, r we have $\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$.
Proof: $\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \neg(p \wedge (\neg q \wedge \neg(\neg r))) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$.

Uppgifter som hör till kapitel 2: MÄNGDLÄRA

Rätt-eller-feluppgifter.

Uppgift 1 på tentamen från januari 2015

1. The operation $\oplus$ on sets is associative, that is for all sets A, B, C we have $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$. $(A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B))$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från april 2015

1. For all sets A, B, C, D we have $A \times B \cap C \times D \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset \wedge B \cap D \neq \emptyset$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från januari 2016

För alla icke-tomma mängder A, B, C har vi alltid $A \subseteq B \subseteq C \wedge C \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A = B = C$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 2 på tentamen från augusti 2016

2. Det finns ingen mängd A sådan att $A \times A = A$.
□**sant** □**falskt** □**avstår**

Uppgift 1 på tentamen från januari 2017

1. Om A, B är mängder så gäller implikationen $(A - B)^c = (B - A)^c \Rightarrow A = B$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från april 2017

4. Symbolen $\subseteq$ är den vanliga symbolen för delmängdsförhållanden men ibland används symbolen $\subset$ för att uttrycka en mer strikt relation mellan två mängder, då betyder $A \subset B$ att A är en delmängd av B men också att $A \neq B$. Påståendet som du ska utvärdera är: om $A \subset C$ och $A \subseteq B \subseteq C$, så har vi också $A \subset B$ eller $B \subset C$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från januari 2018

3. Låt A, B, C vara mängder. Då gäller
$$B \subseteq A \cup C \quad \text{and} \quad B \cap C \subseteq A \quad \text{implies} \quad B \subseteq A.$$
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från april 2018

1. För godtyckliga mängder A, B, C gäller följande:
$$(A - (B \cap C))^c = (A - B)^c \cap (A - C)^c.$$

□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 2 på tentamen från april 2019

2. För godtyckliga mängder A, B gäller $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (B - A)^c \cup (A - B)^c$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 7 på tentamen från april 2015

7. För vilka tre mängder som helst, A, B, C, bevisa att $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \times B \subset B \times C$.

Uppgift 10 på tentamen från januari 2016

10. Antag att A, B, C är tre mängder som inte har några gemensamma element (inga element ligger i alla tre mängderna). Antag vidare att antalet element som ligger i precis två av mängderna är totalt 6. Mängden $A \triangle B \triangle C$ definieras som mängden av de element som ligger i precis 1 eller 3 av A, B, C. Visa att $|A \cup B \cup C| = |A \triangle B \triangle C| + 6$.

Uppgift 12 på tentamen från mars 2016

12. Antag att A, B, C, D är fyra godtyckliga mängder. Bevisa följande formel genom att använda formelmanipulation,
$$A \times B - C \times D = A \times (B - D) \cup (A - C) \times (B \cap D).$$

Hint: Write $(C \times D)^c$ as $M_1 \cup M_2$ where $M_1 = C^c \times D$ and M_2 is another appropriately chosen set. Without proof you may also use the set formulas for the distributive laws: $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$, $(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W)$ and similar.

Uppgift 1 på kontrollskrivning 1 från 2015

1. Låt A, B, C vara godtyckliga mängder och betrakta den symmetriska differensen mellan två mängder:
$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$
Bevisa att varje element som ligger i mängden $A \triangle B \triangle C$ ligger i exakt 1 eller 3 av mängderna A, B, C.

Uppgift 1 på kontrollskrivning 1 från 2016

1. Låt A och B vara två mängder. Utan Venndiagram, visa att
$$(A \cup B) - (A \cap B) = (B - A) \cup (A - B).$$
Ledning: för godtyckliga mängder E, F gäller $E - F = E \cap F^c$. Låt $E = A \cup B$ och $F = A \cap B$.
Om du löser uppgiften med Venndiagram får du 1 poäng.

Uppgift 1 på kontrollskrivning 1 från 2017

1. För mängder E och F gäller generellt att mängddifferensen $E - F$ defineras som mängden $E \cap F^c$. Det betyder att en mängddifferens kan skrivas om utan minustecken med hjälp av denna definition. Använd denna typ av omskrivning för att visa att
$$B - A = A^c - (A^c - B)$$
där A och B är vilka mängder som helst.

Ledning: Skriv om både vänster och höger led av $B - A = A^c - (A^c - B)$ så att inga minustecken förekommer. Du måste komma fram till samma uttryck för båda led. Venndiagram kan inte användas för att lösa denna uppgift.

Uppgift 9 på tentamen från januari 2018

9. The following statement is erroneous and the proof is also erroneous. Find all the errors and correct them. (**1p** for correcting the statement and **2p** for correcting the proof.) (Följande påstående är felaktigt och beviset är också felaktigt. Finn alla fel och rätta dem. (**1p** för att rätta påståendet och **2p** för att rätta beviset.))

Statement: For all sets, A, B, C, we have $(A \cap (B \cup C))^c = A^c \cap (B^c \cup C^c)$
Proof: To prove that two sets E and F are equal we can show the equivalence $x \in E \Leftrightarrow x \in F$. We do this with the two sets we want to show are equal. Then (För att visa att två mängder E

och F är lika kan vi visa ekvivalensen $x \in E \Leftrightarrow x \in F$. Vi gör detta med de två mängder som vi vill visa är lika. Då gäller)

$$x \in (A \cap (B \cup C))^c \Leftrightarrow \neg(x \in (A \cap (B \cup C))) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in (B \cup C)) \Leftrightarrow$$
$$\neg(x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C))) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\neg(x \in A) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \Leftrightarrow x \in A^c \wedge (x \in B^c \vee x \in C^c) \Leftrightarrow$$
$$x \in A^c \wedge x \in (B^c \cup C^c) \Leftrightarrow x \in A^c \cap (B^c \cup C^c)$$

This proves the equality (Detta visar identiteten) $(A \cap (B \cup C))^c = A^c \cap (B^c \cup C^c)$.

Uppgift 10 på tentamen från april 2018

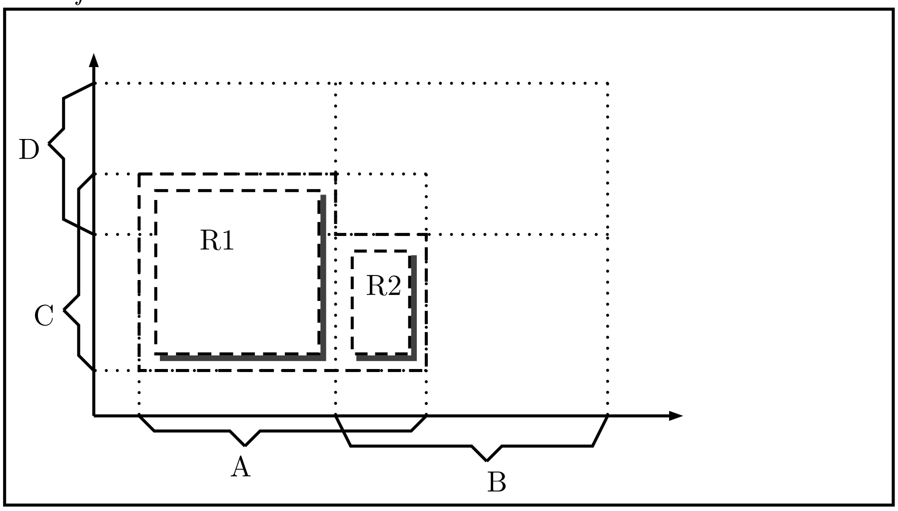
10. In this problem we consider the formation of a set difference between two cross products. An erroneous formula is given and your task is to correct the formula **(1.5p)** and also give an alternative formula **(1.5p)**. The proof given is so bad that it needs to be totally disregarded and we will not bother with demanding a proof in this problem, you need only to provide the two formulas.

Erroneous statement: For any four sets A, B, C, D we have the formula

$$A \times C - B \times D = (A - B) \times (C - D)$$

Bad proof: $A \times C - B \times D = A \times C \cap (B \times D)^c = A \times C \cap (B^c \times D^c) = (A \cap B^c) \times (C \cap D^c)$.

Hint: To find the correct formula, envision the set difference of the two cross products in a cartesian plane as follows:



Here we imagine the sets A, B, C, D as intervals along the x- and y-axis respectively. Of course the sets can be more general than intervals but from this image it is clear that $A \times C - B \times D$ can be seen as the union between two rectangles, denoted R1 and R2. These rectangles can be expressed as cross products and by finding the expressions for them, in terms of set expressions involving A, B, C, D, you can state a correct version of the formula. Then give an alternative version of the formula by imagining another decomposition of the set difference into two other rectangles in analogy with the first decomposition.

Uppgift 1 på kontrollskrivning 2 från 2018

1. Antag att A, B, C och D är mängder som uppfyller följande premisser:
   1. $A \subseteq B$
   2. $B \subseteq C \cap D$
   3. $C \subseteq D^c$

   Visa att detta ger att $A = \emptyset$. Venndiagram kan inte användas för att ge ett riktigt bevis, men om du inte kan visa det här genom mängdformler eller elementargument så kan du få 1 poäng om du ger ett Venndiagram som du tycker styrker slutsatsen. Men se till att motivera din lösning noga, oavsett om du använder Venndiagram eller inte.

   Ledning: du kan prova ett motsägelsebevis, antag att $A \neq \emptyset$ då finns ett element $x \in A$. Vad gäller för detta x?

Uppgift 2 på tentamen från januari 2019

2. För alla mängder A, B, C gäller $A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \cup B^c) \cap C = C - B$.

   □**true** □**false** □**pass**

Uppgift 9 på tentamen från april 2019

9. Låt A, B, C, D vara godtyckliga mängder. Betrakta formeln

$$(A \times C) \cup (B \times D) = ((A \cup B) \times (C \cup D) - (A \times D)) - (B \times C).$$

Med formeln vill vi ge ett uttryck för unionen mellan kryssprodukterna i vänsterledet. Men formeln är felaktig. Ange ett nytt högerled så att formeln stämmer. Du behöver inte motivera ditt svar för att få full poäng, det räcker med att bara ange svaret, men för din egen skull kan du rita skisser av kryssprodukter i ett plan för att få inspiration. Om du inte skulle klara uppgiften kan vi efteråt diskutera dessa skisser.

Uppgifter som hör till kapitel 3: FUNKTIONER

Rätt-eller-feluppgifter.

Uppgift 4 på tentamen från april 2015

4. A function that is injective (one-to-one) always has an inverse.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 8 på tentamen från april 2018

8. Let A, B, C be any sets and introduce the functions $f : A \to B$ and $g : B \to C$. We can then also form the composition, $h = g \bigcirc f : A \to C$. Consider the following two statements:
(a) If g is surjective and f is injective, then h is surjective.
(b) If both f and g are injective, then h is also injective.
These statements are either true or false. For each statement: if it is true, prove it, if it is false, provide an example of two functions f, g that satisfy the premises but for which the conclusion does not hold. **(1.5p)** each.

Uppgifter som hör till kapitel 4: INLEDANDE TALTEORI

Rätt-eller-feluppgifter.

Uppgift 2 på tentamen från januari 2016

2. För alla primtal, p, q, så är följande sant: $p|q \Rightarrow p = q$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från januari 2016

3. För alla heltal, a, b, c, så är följande sant: $ab|c \wedge bc|a \wedge ac|b \Rightarrow a = b = c$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 2 på tentamen från mars 2016

2. Låt n, m vara två positiva heltal > 1. Vidare låt $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ och $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\beta_r}$ vara de standardmässiga primtalsfaktoriseringarna av m, n. Då gäller:

$$n|m \wedge m|n \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 = \beta_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_r = \beta_r.$$

□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från mars 2016

3. För alla heltal, a, b, c, så är följande sant: Om $10a - 9b = 1$ och $a|bc$ så gäller $a|c$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från augusti 2016

3. Antag att a, b, d_1, d_2 är positiva heltal, vilka som helst, men större än eller lika med 2 som också uppfyller $d_1|a$ och $d_2|b$. Antag vidare att $a < b$. Då måste detta vara sant: $d_1 \leq a \leq d_2 \leq b$.
□**sant** □**falskt** □**avstår**

Uppgift 3 på tentamen från januari 2017

3. För godtyckliga positiva heltal a, b, c, om $a|b$, $b|c$ och $c|a$ gäller så måste vi ha $a = b = c$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 2 på tentamen från april 2017

2. För alla positiva heltal, n, om kongruensen $3^n \equiv 1 \pmod 8$ gäller så måste n vara jämnt.

□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från april 2017

3. För godtyckliga positiva heltal, a, b gäller implikationen $a^2|b \wedge b^2|a \Rightarrow a|b^2 \wedge b|a^2$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från januari 2018

1. Om a, b är positiva heltal med $a^2|b^2$, då måste vi också ha $a|b$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från januari 2018

4. Om a, b är två heltal med $gcd(a, b) = 1$ så är mängden $\{sa + tb; s, t \in \mathbb{Z}\}$ beståendes av alla heltal.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 2 på tentamen från april 2018

2. Om a, b, c, d är positiva heltal med alla delbarhetsrelationerna $ab|cd$, $ac|bd$, $ad|bc$, $bc|ad$, $bd|ac$ och $cd|ab$ uppfyllda, då måste dessa fyra tal i själva verket vara ett och samma tal ($a = b = c = d$).
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från april 2018

4. Beteckna med $\gcd(a, b)$ största gemensamma delaren till heltalen a, b. För godtyckliga heltal a, b, x gäller då att om $\gcd(a, x) = 1$ och $gcd(b, x) = 1$ så ger detta $\gcd(ax, bx) = x^2 \gcd(a, b)$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från januari 2019

1. Summan av två primtal större än 2 är alltid ett jämnt tal.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från januari 2019

3. Låt a, b, x vara positiva heltal och sätt $lcm(a, b) = ab/gcd(a, b)$. Då gäller $lcm(ax, bx) = x^2 lcm(a, b)$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från april 2019

3. Låt a, b, c vara positiva heltal och antag att $a|bc \wedge c|ab \wedge b|ac$. Då gäller $a = b = c$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från april 2019

4. För varje positivt heltal N, beteckna med $\alpha_{N,1}, \alpha_{N,2}, \alpha_{N,3}$, exponenterna i den entydigt bestämda standardiserade primtalsfaktoriseringen av N. ($N = 2^{\alpha_{N,1}} \cdot 3^{\alpha_{N,2}} \cdot 5^{\alpha_{N,3}} \cdots$.) Då gäller att om $N \geq M$, så måste vi också ha $\alpha_{N,i} \geq \alpha_{M,i}$ för alla heltal $i \geq 1$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 9 på tentamen från april 2015

9. Använd Euklides algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 23 (mod 17) och använd den för att finna alla heltal x som uppfyller $23x \equiv 337 \pmod{17}$.

Uppgift 9 på tentamen från mars 2016

9. Följande påstående är sant men beviset innehåller ett fel. Finn felet (1p) och rätta det (2p).
Påstående: För alla heltal n gäller att talet $n(n + 2)(n + 4)$ är delbart med 3.
Bevis: Antingen är n delbart med 3 eller inte. Om n är delbart med 3 så kan vi skriva $n = 3k$ för något heltal k. Då gäller $n(n + 2)(n + 4) = 3k(3k + 2)(3k + 4) = 3 \cdot k(3k + 2)(3k + 4)$ vilket klart är delbart med 3. Om n inteär delbart med 3 så kan vi skriva $n = 3k + 1$ och då har vi $n(n+2)(n+4) = (3k+1)(3k+1+2)(3k+1+4) = (3k+1)(3k+3)(3k+5) = 3\cdot(3k+1)(k+1)(3k+5)$ vilket återigen är klart delbart med 3. Detta fullbordar beviset.

Uppgift 10 på tentamen från mars 2016

10. Låt n vara vilket positivt heltal som helst. Beteckna med σ_n siffersumman i den decimala representationen av n. (Till exempel, om $n = 123$ så är $\sigma_n = 1 + 2 + 3 = 6$.) Bevisa att $9|n \Leftrightarrow 9|\sigma_n$.)

Uppgift 1 på kontrollskrivning 2 från 2015

1. Om p och q är två olika primtal, bevisa att det alltid finns heltal s, t sådana att
$$sp^n + tq^n = n$$
för varje heltal n. (Självfallet får vi möjligen olika värden på s och t för olika värden på n.)
Uppgiften uppfattades av studenterna som svårare än en KS-uppgift och att den snarare hörde hemma på en tentamen.

Uppgift 11 på tentamen från april 2017

11. Låt A stå för en mängd av heltal. Beteckna med $|A|$ antal element i A. Tex gäller $|\{1,3,5\}| = 3$. Låt nu E vara en ändlig icketom mängd av positiva heltal (vilken som helst). Bevisa att
$$x, y \in E \wedge x|y \Rightarrow \; |\{z \in E; x|z\}| \geq \; |\{z \in E; y|z\}|\,.$$

Uppgift 6 på tentamen från januari 2018

6. Använd Euklides Algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 21 modulo 23 och använd den för att finna alla heltal x som löser kongruensen
$$21x \equiv 5 \pmod{23}.$$

Uppgift 5 på tentamen från april 2018

5. Använd Euklides algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 11 modulo 31 och använd den inversen för att finna alla heltal x som uppfyller $11x \equiv 5 \pmod{31}$.

Uppgift 3 på tentamen från september 2018

3. Använd Euklides algoritm för att finna den multiplikativa inversen till 11 modulo 29 och använd den för att finna alla x sådana att $11x \equiv 23 \pmod{29}$. Svara på så enkel form som möjligt.

Uppgift 6 på tentamen från januari 2019

6. Använd Euklides Algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 11 modulo 29 och använd den för att finna alla heltal x som löser kongruensen
$$11x \equiv 17 \pmod{29}.$$

Uppgift 12 på tentamen från januari 2019

12. Låt a, b, c vara tre heltal utan gemensamma delare (dvs antag att $\gcd(a,b) = \gcd(a,c) = \gcd(b,c) = 1$). Visa att det finns heltal x, y sådana att $a + bx + cy = 1$.

Uppgift 10 på tentamen från april 2019

10. För alla positiva heltal n definierar vi $\phi(n)$ som antalet positiva heltal mindre än eller lika med n som är relativt prima till n, det vill säga antalet tal i mängden $\{x \in \mathbb{N}; x \leq n \wedge \gcd(x,n) = 1\}$. Du får gratis informationen att om a och b är två relativt prima tal så gäller $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$. Utgående från denna information, formulera och bevisa en formel för $\phi(n)$ för ett godtyckligt heltal $n \geq 1$. (*Ledning: lista först ut vad $\phi(p^k)$ är, då p är ett primtal. Använd sedan den standardmässiga primtalsfaktoriseringen av n för att ge en allmän formel.)*

Uppgifter som hör till kapitel 5: RELATIONER

Rätt-eller-feluppgifter.

Uppgift 2 på tentamen från januari 2015

2. The function $f(x) = x$ is also an equivalence relation. There are other functions that also have this property.
□true □false □pass

Uppgift 6 på tentamen från januari 2015

6. On the set of all integers, $\mathbb{Z}$, the division relation, $a|b \Leftrightarrow a$ divides b, is a partial order relation.
□true □false □pass

Uppgift 6 på tentamen från april 2015

6. On the set of all integers, $\mathbb{Z}$, the relation, $aRb \Leftrightarrow a|b \wedge b|a$, is an equivalence relation.
□true □false □pass

Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 12 på tentamen från januari 2015

12. Definera relationen $\sim$ på $\mathbb{Z}^+$ (alltså alla positiva helal) genom $x \sim y \Leftrightarrow xy$ är en kvadrat. (Det vill säga det finns ett $k \in \mathbb{Z}^+$ så att $xy = k^2$.) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation. (Ledning: du får använda att om kvadraten på ett rationellt tal är ett heltal så måste detta rationella tal vara ett heltal.)

Uppgift 10 på tentamen från april 2015

10. Låt $E = \{1, 2, 3\}$ och betrakta $P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ - mängden av alla delmängder av E. Bevisa att $P(E)$ är en partiellt ordnad mängd under relationen $\subseteq$.

Uppgift 11 på tentamen från mars 2016

11. Betrakta mängden av alla par av naturliga tal $\Omega = \{(p, q); p, q \in \mathbb{N}\}$. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på Ω genom att sätta $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a|c \wedge d|b$. Besvara följande frågor:
    (a) Vilka egenskaper har $\mathcal{R}$? Reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk, transitiv? (2p)
    (b) Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation och/eller en partiell ordningsrelation? (1p)
    Fullständiga motiveringar krävs.

Uppgift 8 på tentamen från augusti 2016

8. Define the relation R on $\mathbb{Z}$ by $aRb \Leftrightarrow a|b \wedge b|a$. Consider the following statement and erroneous proof:
   Statement: The relation R is the same as the identity relation, that is $aRb \Leftrightarrow a = b$.
   Proof: If $a = b$, then $a = 1 \cdot b$ so $a|b$. Similarly $b = 1 \cdot a$ so that $b|a$. Consequently $a = b \Rightarrow a|b \wedge b|a \Leftrightarrow aRb$. We have therefore shown $a = b \Rightarrow aRb$. Assume conversely that aRb, then $a|b$ and $b|a$. If $a = 0$, then $a|b$ means that $b = a \cdot k = 0$ so then we also have $b = 0$. In the same way we can conlude that $b = 0 \Rightarrow a = 0$. If $a \neq 0$, then, since we have assumed that $a|b$ and $b|a$, there exist integers k_1, k_2 so that $a = k_1 b$ and $b = k_2 a$ and we can assume that these integers are nonzero which also gives that $b \neq 0$. From this we can conclude that $a = k_1 \cdot k_2 a$ and by dividing with a we obtain $k_1 k_2 = 1$. But the only way for the product of two integers to be 1 is if both integers are 1, hence $k_2 = k_1 = 1$ showing that $a = k_1 \cdot b = b$. This means that we have shown that $aRb \Rightarrow a = b$. The proof is complete.

   Find the error in the proof and explain why it is an error. The same proof will work if we modify the statement we want to prove a just a little bit, how?

Uppgift 10 på tentamen från augusti 2016

10. Betrakta mängden av alla ändliga delmängder av de naturliga talen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Några exempel på sådana mängder är $\{1, 2, 3\}, \{5, 8\}, \{2\}, \emptyset$. Alla är ändliga och har 3, 2, 1, respektive 0 element. Beteckna med $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ mängden av alla sådana här delmängder och definiera följande relation $\mathscr{R}$ på $\mathcal{F}(\mathbb{N})$:

    För varje par av mängder $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) : A\mathscr{R}B \Leftrightarrow$ det existerar en bijektion $\phi : A \to B$.

    Bevisa att relationen $\mathscr{R}$ är en ekvivalensrelation och ange vilka ekvivalensklasserna är.

Uppgift 6 på tentamen från april 2017

6. Betrakta relationen $\mathcal{R}$ definerad av $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \pmod 7$. Visa att den är en ekvivalensrelation **(2p)**. Den har fyra ekvivalensklasser. Ange dem. **(1p)** (Utan motivering.)

Uppgift 10 på tentamen från april 2017

10. Definera relationen $\mathcal{R}$ på on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ enligt

$$(x, y)\mathcal{R}(z, w) \Leftrightarrow x \leq z \vee y|w.$$

    Visa att $\mathcal{R}$ är reflexiv **(1p)**, ***inte*** antisymmetrisk **(1p)** och ***inte*** heller transitiv **(1p)**.

Uppgift 10 på tentamen från januari 2018

10. Denote by $\mathbb{N}$ the set of all positive integers, $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Consider the relation $\mathcal{R}$ defined on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ by:

$$(x, y)\mathcal{R}(z, w) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{w}.$$

    Prove that $\mathcal{R}$ is an equivalence relation **(1.5p)**. Describe one of the equivalence classes **(1.5p)**.

Uppgift 11 på tentamen från april 2018

11. Studera $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{11}\}$. Bilda delmängden $G \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ genom att sätta $G = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_{12}$ genom $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in G$. *(a)* Bevisa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}_{12}$ **(2p)** och *(b)* ange samtliga ekvivalensklasser **(1p)**. (*Anmärkning: G är en så kallad "undergrupp" till* $\mathbb{Z}_{12}$.)

Uppgift 10 på tentamen från januari 2019

10. Denote by $\mathbb{N}$ the set of all positive integers, $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Consider the relation $\mathcal{R}$ defined on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ by:

$$(x, y)\mathcal{R}(z, w) \Leftrightarrow x - y = z - w$$

Prove that $\mathcal{R}$ is an equivalence relation **(1p)**. Describe **all** of the equivalence classes and draw a figure that illustrates them **(2p)**.

Uppgifter som hör till kapitel 6: FÖRDJUPAD TALTEORI

Rätt-eller-feluppgifter.

Uppgift 5 på tentamen från april 2015

5. Let a, n be a positive integers. If a and n are relatively prime, there always exists a solution to the congruence $ax \equiv b \pmod{n}$, unless b is too large.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från januari 2017

4. Låt p vara vilket primtal som helst. I $\mathbb{Z}_p$ gäller då alltid $\overline{(p-1)!} \neq \overline{0}$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 10 på tentamen från januari 2015

10. Definera en talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ genom $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$. Get ett explicit uttryck för a_n. (Dvs lös differensekvationen.)

Uppgift 11 på tentamen från januari 2015

11. Bevisa, genom att använda matematisk induktion, att $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Uppgift 12 på tentamen från april 2015

12. Bevisa, genom att använda matematisk induktion, att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Uppgift 6 på tentamen från januari 2016

6. Lös följande differensekvation $a_{n+2} = 11a_{n+1} - 28a_n$ då $a_0 = 0$ och $a_1 = 3$.

Uppgift 8 på tentamen från januari 2016

8. Följande bevis innehåller ett fel. Finn felet (1p) och rätta det (2p).
Påstående: Alla positiva heltal > 1 är delbara med ett primtal.
Bevis: Låt n vara ett godtyckligt positivt heltal. Om n är ett primtal så är n delbart med ett primtal, nämligen sig självt. Annars är n ett sammansatt tal, dvs vi kan skriva $n = a \cdot b$ där a, b är positiva heltal > 1. Välj det minsta av dessa tal, vi kan anta att det är a, då måste detta tal vara ett primtal, vi har alltså visat att n är delbart med ett primtal (a) och eftersom n var godtyckligt valt positivt heltal så är beviset klart.

Uppgift 9 på tentamen från januari 2016

9. Följande och bevis är ofullständigt. Fyll i de detaljer som saknas där det står "..." i texten så att beviset blir fullständigt.
Påstående: För alla heltal $n \geq 5$ gäller $2^n \geq n^2$.
Bevis: Induktion över n. Introducera namnet $A(n)$ för uttalandet att $2^n \geq n^2$. Vi ska visa, med matematisk induktion, att $\forall n \geq 5 : A(n)$.
   1. ...
   2. Antag att $A(p)$ gäller för ett visst $p \geq 5$. Visa nu att ...
   3. ...

Uppgift 12 på tentamen från januari 2016

12. *Fibonaccitalen* definieras rekursivt som $f_0 = 1, f_1 = 1$ och $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, för alla $n \geq 0$. Sätt $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och betrakta potenserna $M, M^2, M^3, \ldots$ av denna matris. Visa att

$$M^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \text{ for all } n \geq 2.$$

"Potenser av en matris" är matrisprodukterna

$$M^0 = I, \qquad M^1 = M, \qquad M^2 = M \cdot M, \qquad M^3 = M \cdot M \cdot M, \qquad \ldots.$$

Uppgift 7 på tentamen från mars 2016

7. Om vi slumpvis från de *jämna* heltalen i mängden $\{1, 2, \ldots, 10000\}$ väljer ett heltal x, hur stor är då sannolikheten att x är delbart med 3 men inte med 5?

Uppgift 8 på tentamen från mars 2016

8. Följande bevis är ofullständigt, där det står "...", fyll i så att det blir fullständigt.
Påstående: För varje positivt heltal n gäller $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Bevis: Matematisk induktion över $n \geq 1$. För varje positivt n kalla predikatet att utsagan är sann för $A(n)$, det vill säga introducera

$$A(n) \Leftrightarrow LHS_n = RHS_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Steg 1. Vi verifierar först att $A(1)$ är sann, vi ser detta genom ...
Steg 2. *Induktionssteget.* Vi ska nu visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann för alla $p \geq 1$. Antag därför att ...
Steg 3. Slutligen ...

Uppgift 7 på tentamen från augusti 2016

7. Lös den differensekvationen, $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 15a_n \quad (n \geq 0)$ där $a_0 = 2$ och $a_1 = 8$.

Uppgift 9 på tentamen från augusti 2016

9. Consider the following statement and proof. The proof is incomplete, "..." denotes missing details, fill in the missing details.

Statement: For all positive integers n we have $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\ldots+k} = \frac{2n}{n+1}$.
Proof: We first note that $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ so that what we have to prove is equivalent to $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2n}{n+1}$ which is equivalent to $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Call this statement $A(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. We now proceed to prove $A(n)$ by induction over n by taking the three steps in a proof by induction:
1. ...
2. ...
3. In step 2 we showed that $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ for all integers $p \geq 1$. ... That completes the proof by the principle of mathematical induction.

Uppgift 12 på tentamen från augusti 2016

12. För varje positivt heltal n, bevisa att $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$.

Uppgift 2 på kontrollskrivning 1 från 2015

Använd matematisk induktion för att visa att så fort $n \geq 1$ är ett heltal så gäller

$$4 | 3^{2n-1} + 1.$$

Uppgift 2 på kontrollskrivning 2 från 2015

Använd matematisk induktion för att visa att 5 delar $n^5 - n$ så fort n är ett ickenegativt heltal.
Ledning: $(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$.

Uppgift 2 på kontrollskrivning 1 från 2016

2. Använd matematisk induktion för att visa att så fort $n \geq 1$ är ett heltal så gäller

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Uppgift 2 på kontrollskrivning 2 från 2016

2. Använd matematiskt induktion för att visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller

$$3|5^n - 2^n.$$

Uppgift 6 på tentamen från januari 2017

6. Lös differensekvationen $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ där $a_0 = 7$ och $a_1 = 16$.

Uppgift 7 på tentamen från januari 2017

7. Följande bevis innehåller tre fel. Finn dem och rätta dem.
   Påstående: För alla ickenegativa heltal, $n = 0, 1, 2, \ldots$, gäller $4|11^n - 7^n$.
   Bevis: Introducera predikatet $A(n) \Leftrightarrow 4|11^n - 7^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
   Steg 1. Kontrollera att $A(1)$ är sann, dvs kolla att $4|11^1 - 7^1$. Men detta är ekvivalent med $4|11-7$ vilket är uppenbart sant eftersom 4 delar sig själv. $(11 - 7 = 4 = 1 \cdot 4.)$
   Steg 2. Induktionssteget. För godtyckliga ickenegativa heltal p visa att $A(p) \Rightarrow A(p+1)$. Antag alltså att $A(p)$ är sann för ett visst godtyckligt heltal $p \geq 0$. Det betyder att det finns ett heltal k sådant att $11^p - 7^p = 4k$. med hjälp av detta visa att $4|11^{p+1} - 7^{p+1}$ (vilket är $A(p+1)$), dvs sök ett heltal q sådant att $11^{p+1} - 7^{p+1} = 4q$. Finns ett sådant q? Ja, vi har $11^{p+1} - 7^{p+1} = 11 \cdot 11^p - 7^p \cdot 7 = 11 \cdot (11^p - 7^p) \cdot 7 = 11 \cdot 4k \cdot 7 = 4 \cdot 11 \cdot 7 \cdot k$ (enligt induktionsantagandet gäller: $11^p - 7^p = 4k$, det användes här) vilket visar existensen av ett q $(= 11 \cdot 7 \cdot k)$ så att $A(p+1)$ gäller. Implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är alltså visad. Beviset är klart.

Uppgift 8 på tentamen från januari 2017

8. Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.

   Påstående: För alla heltal $n \geq 1$ gäller $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$.
   Bevis: Induktion över n. Introducera namnet $A(n)$ för utsggan $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$. Vi ska visa $\forall n \geq 1 : A(n)$.
   1. ...
   2. Antag att $A(p)$ gäller för ett visst $p \geq 1$ ...
   3. ...

Uppgift 11 på tentamen från januari 2017

11. Använd matematisk induktion för att visa följade påstående: varje icketom mängd av positiva heltal har ett minsta element. (Hint: Introduce the predicate $A(n)$ = each set with n elements has a smallest member. Now prove $\forall n \geq 1 : A(n)$. You need to also treat infinite sets separately.)

Uppgift 5 på tentamen från april 2017

5. Lös differensekvationen $a_{n+2} = 5a_{n+1} + 14a_n$ där $a_0 = 5$ och $a_1 = 8$.

Uppgift 8 på tentamen från april 2017

8. Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.
   Påstående: För alla heltal $n \geq 0$ gäller $7|2^{3n} - 1$.
   Bevis: Induktion över n. Introducera predikatet $A(n) \Leftrightarrow 7|2^{3n} - 1$. Vi ska visa att $\forall n \geq 0 : A(n)$.
   1. ...
   2. Antag att $A(p)$ gäller för ett visst $p \geq 0$ ...
   3. ...

Uppgift 9 på tentamen från april 2017

9. Följande bevis innehåller minst tre fel. Finn dem och rätta dem.

   Påstående: För alla ickenegativa heltal n gäller $2^n < (n+2)!$.

Bevis: Beteckna med $A(n)$ predikatet $2^n < (n+2)!$. Bevisa, med matematisk induktion $\forall n \geq 0 : A(n)$. Beteckna även med VL_n och HL_n vänster respektive höger led av $A(n)$.

Steg 1. Verifiera att $A(0)$ gäller, dvs kolla att $VL_0 < HL_0$. Gäller detta? $VL_0 = 2^0 = 1$ och $HL_0 = (0+2)! = 2$ och $1 < 2$ så, ja, $A(0)$ stämmer.

Steg 2. Ta induktionssteget, dvs visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ stämmer för alla relevanta p. Antag alltså att $A(p) \Leftrightarrow 2^p < (p+2)!$ för ett godtyckligt $p \geq 1$. Ni ska vi studera $HL_{p+1} - VL_{p+1} = (p+1+2)! - 2^{p+1} = (p+3)! - 2^{p+1}$ och vi vill visa att detta är positivt. Enligt induktionsantagandet gäller $(p+2)! > 2^p$ och vi kan använda detta för att skriva

$$HL_{p+1} - VL_{p+1} = (p+3)! - 2^{p+1} = (p+3) \cdot (p+2)! - 2 \cdot 2^p > (p+3) \cdot 2^p - 2 \cdot 2^p >$$

$$(p+3) \cdot 2^p - 2 \cdot 2^1 \geq (p+3) \cdot 2^1 - 4 = 2p + 6 - 4 = 2p + 2 > 0$$

så att vi får $HL_{p+1} - VL_{p+1} > 0 \Leftrightarrow A(p+1)$ sant vilket sammmantaget visar att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann.

Steg 3. Sammanfattningsvis gäller $A(0)$ – enligt steg 1 – $\Rightarrow A(1)$ sant – enligt steg 2 – $\Rightarrow A(2)$ sant – igen enligt steg 2 – och steg 2 använt igen och igen gör att vi kan täcka in alla ickenegativa heltal vilket alltså visar att $A(n)$ måste vara sant för alla $n \geq 0$. Beviset är klart.

Uppgift 12 på tentamen från april 2017

12. Prove *Wilson's Theorem*, that is prove that if p is a prime number, then

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Hint: Consider the solutions to the congruence $x^2 = \bar{1}$ *in* $\mathbb{Z}_p$.

Uppgift 2 på kontrollskrivning 1 från 2017

2. Använd matematisk induktion för att visa att så fort $n \geq 1$ är ett heltal så gäller

$$\sum_{k=1}^{n}(6k-1) = 3n^2 + 2n.$$

Uppgift 2 på kontrollskrivning 2 från 2017

2. Använd matematisk induktion för att visa att så fort $n \geq 1$ är ett heltal så gäller delbarhetsrelationen

$$4 | 11^n - 7^n.$$

Uppgift 5 på tentamen från januari 2018

5. Lös differensekvationen $a_{n+2} = 9a_{n+1} - 14a_n$ där $a_0 = 0$ och $a_1 = 5$.

Uppgift 8 på tentamen från januari 2018

8. Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.

Statement: For all positive integers n we have $\sum_{k=1}^{n}(4k+1) = 2n^2 + 3n$. (För alla heltal $n \geq 1$ visa den givna likheten.)

Proof: Induction over n. Introduce the name $A(n)$ for the statement $\sum_{k=1}^{n}(4k+1) = 2n^2 + 3n$. We shall prove, by mathematical induction that $\forall n \geq 1 : A(n)$.

1. ...
2. Assume that the $A(p)$ holds for a particular $p \geq 1$. Now show ...
3. ...

Uppgift 12 på tentamen från januari 2018

12. Välordningsprincipen för de positiva heltalen (som betecknas $\mathbb{N}$) säger att varje icke-tom delmängd av $\mathbb{N}$ har ett minsta element. Visa att detta medför principen för stark matematisk induktion. *Ledning:* Principen för stark matematisk induktion kan formuleras så här: Om mängden $E \subseteq \mathbb{N}$ uppfyller $1 \in E$ och $\forall k \in \mathbb{N} : \{1, \ldots, k\} \subseteq E \Rightarrow k+1 \in E$. Då gäller $E = \mathbb{N}$.

Uppgift 9 på tentamen från april 2018

9. Fyll i detaljerna i nedanstående ofullständiga bevis så att det blir fullständigt. Fill in the details in the following incomplete proof so that it becomes complete.

Statement: For each integer $n \geq 3$, we have $\frac{(n+2)!}{2^{n-1}} \geq 3^n$.

Proof: Introduce the predicate $A(n) \Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{2^{n-1}} \geq 3^n$, now prove $\forall n \geq 3 : A(n)$ using mathematical induction over n.

1. Check that $A(...)$ holds, that is check that ...
2. Now assume that $A(p)$ holds for a particular integer $p \geq$ ...
3. ...

Uppgift 1 på tentamen från september 2018

1. Solve the recurrence relation $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, a_1 = 4, a_0 = 3$. (Lös den givna differensekvationen.)

Uppgift 6 på tentamen från september 2018

6. The following proof is incomplete. Fill in the missing details where the ellipses (...) appear.

Statement: For every positive integer n we have $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Proof: Mathematical induction over $n \geq 1$. For every positive n call the predicate that the statement is true $A(n)$, that is introduce

$$A(n) \Leftrightarrow LHS_n = RHS_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Step 1. We first verify that $A(1)$ is true, which can easily be seen by ...

Step 2. *The induction step.* Prove that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for each $p \geq 1$. Therefore assume that ...

Step 3. Finally ...

Uppgift 2 på kontrollskrivning 1 från 2018

2. Använd matematisk induktion för att visa att $5|9^n - 4^n$ för alla heltal $n \geq 1$.

Uppgift 2 på kontrollskrivning 2 från 2018

2. Använd matematisk induktion för att visa att $2^n \cdot n! \geq 3^n$ för alla heltal $n \geq 3$.

Uppgift 5 på tentamen från januari 2019

5. Lös differensekvationen $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ där $a_0 = 1$ och $a_1 = 6$.

Uppgift 8 på tentamen från januari 2019

8. The proof of the following statement is incomplete. Fill in the missing details at every place where it reads "..." in the text. (Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.)

Statement: For all integers $n \geq 2$ we have $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$

Proof: (Induction over n.) Introduce the predicate $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Step 1. Check that ...

Step 2. Now, for an arbitrary $p \geq 2$ show that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true. To show this, first assume that ...

Step 3. ...

Uppgift 11 på tentamen från januari 2019

11. Prove that if $p > 1$ is a natural number with $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, then p must be a prime number.

Uppgift 5 på tentamen från april 2019

5. Lös differensekvationen $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ med $a_0 = 3$ och $a_1 = 5$.

Uppgift 6 på tentamen från april 2019

6. Använd Euklides Algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 35 modulo 67 och använd den för att finna alla heltal x som uppfyller

$$35x \equiv 18 \pmod{67}.$$

Svara med så små tal som möjligt (reducerade modulo 67).

Uppgift 8 på tentamen från april 2019

8. Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.

Påstående: Låt $f_0, f_1, f_2, \ldots$ beteckna *Fibonaccis talföljd* det vill säga $f_0 = 0, f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ n \geq 0$. För alla positiva heltal n gäller då:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Bevis: Induktion över n. Introducera predikatet

$$A(n) \Leftrightarrow VL_n = HL_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Vi ska visa att $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.
Steg 1. Kontrollera att ...
Steg 2. För ett godtyckligt $p \geq 1$ visa nu att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann. För att visa detta antag först att ...
Steg 3. ...

Uppgifter som hör till kapitel 7: GRAFTEORI

Rätt-eller-feluppgifter.

Uppgift 8 på tentamen från januari 2015

8. The number of edges in the complete graph K_n is always even when $n \geq 4$.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från januari 2015

3. Let G be a connected graph. If there is only one spanning tree of G, then, in fact, G is itself a tree.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 2 på tentamen från april 2015

2. A graph that has a Hamilton cycle automatically has an Euler cycle.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från januari 2016

4. Det finns grafer med totalt 5 hörn. Vidare är varje hörn är förbundet (med en kant) till ett udda antal andra hörn men inte till ett jämnt antal andra hörn.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från mars 2016

4. För en sammanhängande viktad graf kan det finnas flera olika minimala uppspännande träd med olika totala kostnader.
□**true** □**false** □**pass**

Uppgift 1 på tentamen från augusti 2016

1. Låt $G = (V, E)$ vara vilken graf som helst. Låt P vara utsagan "Summan av alla noders gradtal i G är udda", och låt Q vara utsagan "G är ett träd", då är utsagan $P \Rightarrow Q$ sann.
□**sant** □**falskt** □**avstår**

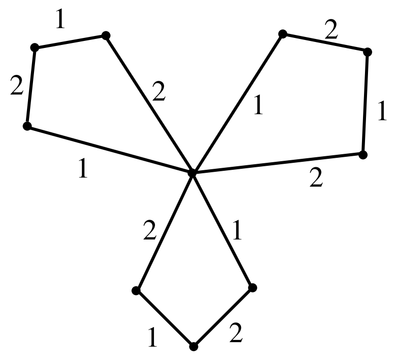
Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 9 på tentamen från januari 2015

9. Bevisa att om ett träd har ett hörn av grad 3 så finns åtminstone 3 löv (hörn med grad 1) i trädet.

Uppgift 5 på tentamen från januari 2016

5. Betrakta nedanstående graf.



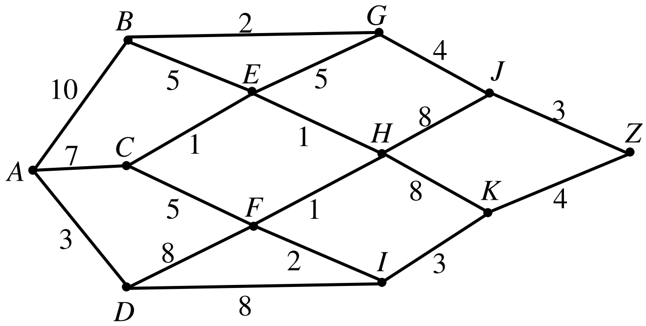
Hitta **alla** minimala uppspännade träd till ovanstående graf, motivera också varför det inte finns andra minimala uppspännande träd än de som du angett.

Uppgift 7 på tentamen från januari 2016

7. *Gradtalsföljden* för en graf definieras som följden av icke-negativa heltal som listar alla hörns gradtal för en given graf. Gradtalsföljden för grafen ovan (i uppgift 5) skulle då vara 2,2,2,2,2,2,2,2,2,6 eftersom den har 9 hörn av grad 2 och ett hörna av grad 6. För de två följderna 1,2,3,4,5 och 2,2,3,3,7,7 gör följande: om det finns en graf med den givna gradtalsföljden, rita den grafen förklara annars varför det inte finns en graf med den givna gradtalsföljden. Kan det finnas ett träd med gradtalssekvensen 2,2,3,3,7,7? Varför? Varför inte?

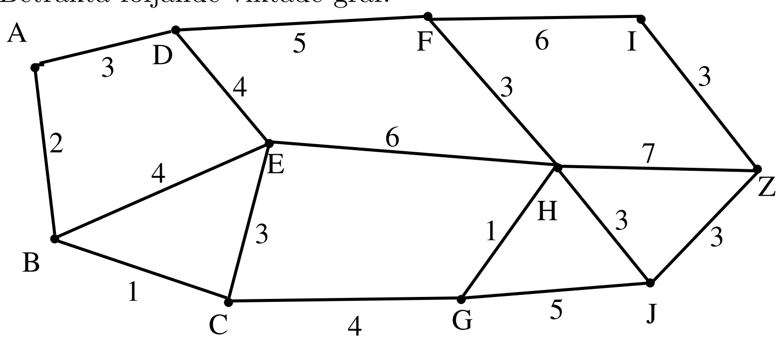
Uppgift 5 på tentamen från augusti 2016

5. Utför Dijkstras Algoritm i nedanstående graf, visa *varje* delsteg (med kandidater till etiketter) och sätt etiketter på *alla* hörn och finn kortaste vägen från A till Z.



Uppgift 5 på tentamen från augusti 2016

5. Betrakta följande viktade graf.



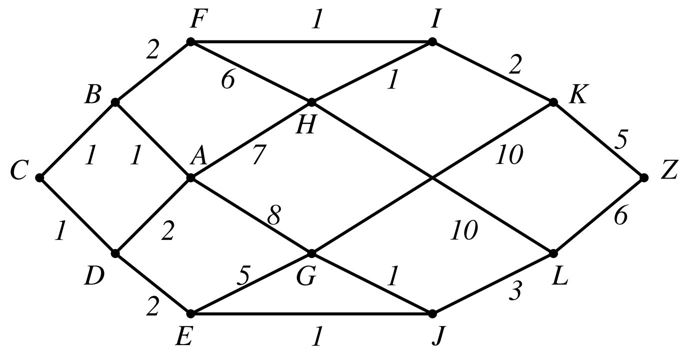
Använd Dijkstras algoritm för att finna en kortaste väg mellan hörnen `A` och `Z`. Redovisa alla delsteg med kandidatetiketter och se till alla att hörn i grafer får etiketter.

Uppgift 11 på tentamen från augusti 2016

11. Visa att delgrafsrelationen på mängden av alla grafer är en partiell ordningsrelation.

Uppgift 5 på tentamen från januari 2017

5. Använd Dijkstras algorithm på nedanstående viktade graf för att hitta kortaste vägen från A till Z. I varje steg, när du placerar ut etiketter, redovisa varje kandidatetikett.

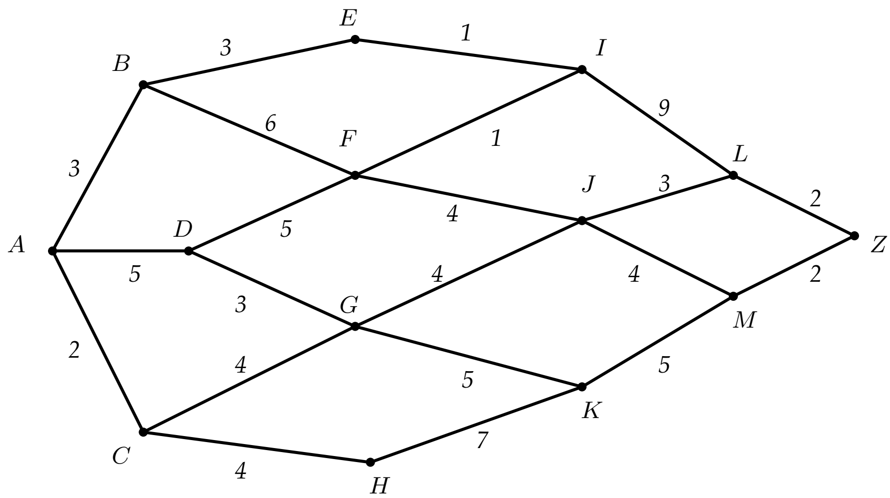


Uppgift 7 på tentamen från april 2017

7. Låt G vara en graf med följand egenskap: om en viss kant tas bort så är den resulterande grafen ett träd. Visa att summan av alla hörns gradtal i grafen är 2 gånger antalet hörn i G.

Uppgift 7 på tentamen från januari 2018

7. Consider the weighted graph below. Use Dijkstra's algorithm to find the shortest path between the nodes A and Z. Present each substep (presenting all the candidate labels) in the process of finding all the labels, and of course present all the labels and the shortest path itself, with its weight, from A to Z.



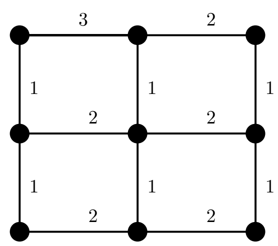
Uppgift 11 på tentamen från januari 2018

11. Prove *Eulers's Theorem*, that is prove that if (V, E) is a graph, then

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

Uppgift 6 på tentamen från april 2018

6. *(a)* Consider the weighted graph to the right. Give *all* minimal spanning trees of this graph **(2p)** (no motivations required) and *(b)* compute their weight **(1p)**.
(a) Betrakta den viktade grafen till höger. Ange *alla* minsta uppspännande träd till grafen **(2p)** (inga motiveringar behövs) och *(b)* ange deras vikt **(1p)**

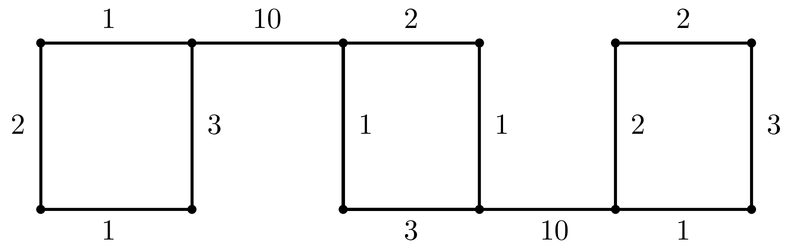


Uppgift 12 på tentamen från april 2018

12. Låt $G = (V, E)$ vara en godtycklig graf med $n \geq 3$ noder. Bevisa att om G har en eulerkrets som också är en hamiltoncykel så måste alla noder i G ha gradtal 2. Använd induktion över n. *(Ledningar: Eulerkrets = en krets som går igenom grafen och korsar alla kanter precis en gång. Hamiltoncykel = cykel som går igenom grafen och besöker alla noder precis en gång.)*

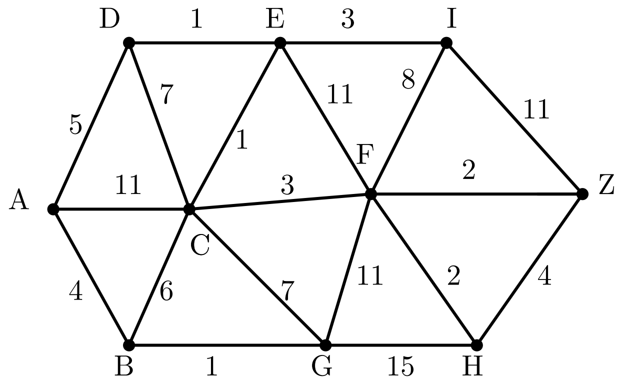
Uppgift 4 på tentamen från september 2018

4. Ange samtliga minimala uppspännande träd till nedanstående graf. Ange också deras vikt. (Inga motiveringar behövs.)



Uppgift 7 på tentamen från januari 2019

7. Consider the weighted graph below.
   (a) Use Dijkstra's algorithm to find the shortest path between the nodes A and Z. Present each substep (with all candidate labels) in the process of finding all the labels, and of course present all the labels and the shortest path itself, with its total cost, from A to Z **(2p)**.
   (b) Give a minimal spanning tree of the graph with its total cost. (You do not need to present details of the solution, just give the tree and its total cost/weight without motivation.) **(1p)**



Uppgifter som hör till kapitel 8: KOMBINATORIK

Rätt-eller-feluppgifter.

Uppgift 5 på tentamen från januari 2015

5. For all positive integers a, b we have $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$.
   □**true** □**false** □**pass**

Uppgift 7 på tentamen från januari 2015

7. Let M be any even number. Then there is no constant term in $(x + \frac{1}{x})^M$.
   □**true** □**false** □**pass**

Uppgift 3 på tentamen från april 2015

3. For any nonnegative integers, $k \leq n$, $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1-i}{k-i}$.
   □**true** □**false** □**pass**

Uppgift 4 på tentamen från augusti 2016

4. Låt x vara en reell variabel och betrakta, för positiva heltal n, binomialutvecklingen av uttrycket
$$\left(x^p + x^{-q}\right)^n$$
   där p och q är olika primtal. Då kan det aldrig finnas en konstant term i detta uttryck.
   □**sant** □**falskt** □**avstår**

Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 14 på tentamen från januari 2015

14. Betrakta det svenska ordet EXTRAHERAR. På hur många olika sätt kan bokstäverna omordnas för att skapa olika bokstavsföljder?

Uppgift 8 på tentamen från april 2015

8. Använd principen om inklusion/exklusion för att finna antalet positiva heltal mindre än eller lika med 10000 som inte är delbara med 6, 10 eller 15.

Uppgift 11 på tentamen från april 2015

11. Betrakta alla multiplar av 4: $\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots$. Bevisa att om man väljer 6 av dessa så kommer alltid två av dem ha en differens som är delbar med 5.

Uppgift 11 på tentamen från januari 2016

11. Visa formeln $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ för alla positiva heltal $n > 0$. Vi accepterar ett bevis med formelmanipulation och kräver inte ett induktionsbevis här.
Hint: Write out the first few terms in the sum $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ *and factor out (bryt ut)* n. *Then use the formula* $\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} = 2^m$ *that is valid for all nonnegative integers* m, *particularly* $m = n - 1$.

Uppgift 9 på tentamen från januari 2017

9. Du har 3 identiska blåa bollar, 2 identiska röda bollar och en gul boll och tre olika korgar. På hur många olika sätt kan du fördela alla bollar i de olika korgarna? (Du får lägga i hur som helst.)

Uppgift 12 på tentamen från januari 2017

12. Denote by $\mathbb{N}$ the set of all positive integers, $\{1, 2, 3, \ldots\}$. The Euler ϕ-function (which is important in cryptography) is defined on $\mathbb{N}$ as follows

$\phi(x) =$ the number of elements in $\mathbb{N}$ less than or equal to x which are relatively prime to x.

For example $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 1$, $\phi(6) = 2$ and for each prime number p, $\phi(p) = p - 1$ since all the numbers $1, 2, \ldots, p - 1$ are relatively prime to p. Let p, q be two distinct prime numbers. Prove that $\phi(pq) = (p - 1)(q - 1)$.

Uppgifter som hör till kapitel 9: SANNOLIKHETSLÄRA

Uppgifter som kräver fullständiga lösningar.

Uppgift 6 på tentamen från augusti 2016

6. Sätt $M = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ och beräkna sannolikheten att ett slumpvis valt tal ur M är delbart med 5 **eller inte** delbart med 3. (Detta gäller talen 5, 11, 15, 20, men inte talen 3, 12, 21.)

Uppgift 7 på tentamen från april 2018

7. Consider the set of the first 10000 positive integers, $E = \{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$. (Låt E vara mängden av de första 10000 positiva heltalen.) Compute the probability that an arbitrary integer chosen from E is divisible by 2 or 5, but *not* by 3. (Beräkna sannolikheten att ett slumpvis valt tal från E är delbart med 2 eller 5, men *inte* med 3.)

Uppgift 2 på tentamen från september 2018

2. Om vi slumpvis från heltalen i mängden $\{1, 2, \ldots, 10000\}$ väljer ett heltal x, hur stor är då sannolikheten att x är delbart med 5 men inte med 3? (If we totally arbitrarily select a number x from them set $\{1, 2, \ldots, 10000\}$, what is the probability that this numbers is divisible by 5, but not by 3? (Ledning: principen om inklusion och exklusion behövs inte.) (Hint: We do not need to use the principle of inclusion and exclusion.)

Uppgift 7 på tentamen från april 2019

7. Beteckna med Ω mängden av alla positiva heltal mindre än eller lika med 10000. Beräkna sannolikheten att ett slumpvis valt tal ur Ω är delbart med 15 eller 35. *(Ledning: i dina beräkningar behöver du i något skede troligen ta hänsyn till att* 15 *och* 35 *inte är relativt prima.)*

Uppgift 11 på tentamen från april 2019

11. I en låda ligger 3 bollar: 2 svarta och 1 vit. Du kan ta bollar ur lådan men du kan inte veta vilken färg bollen har förrän du tagit ut den ur lådan. Vi spelar nu ett spel där du hela tiden tar bollar ur lådan utan lägga tillbaka dem och med följande regler:

    1. Du får ta så många bollar du vill ur lådan, du får alltså avsluta spelet när som helst.
    2. Om du tar den vita bollen vinner du 300 kronor.
    3. Om du tar en svart boll förlorar du 200 kronor.

Vi betraktar det här spelet som en slumpprocess där du spelar för att *maximera din vinst* och utfallsrummet utgörs då av de olika slutresultat som kan uppkomma då du beslutar dig för att inte spela mer. Ett utfall/slutresultat är till exempel om du skulle bli sittande med alla bollarna vilket skulle innebära att du förlorar totalt 100 kronor (du vinner 300 för att du fick den vita, men förlorar 400 för att du också fick de två svarta.)

Ange utfallsrummet då du spelar för att maximera vinsten, ange alltså alla de möjliga utfallen med deras respektive sannolikheter **(2p)** (*Ledning: du kan åskådliggöra hela slumpprocessen i ett träd där roten till trädet är startläget i spelet*). För slumpspel av ovanstående typ kan vi införa vad som kallas *förväntad vinst* som då bildas som en summa över alla utfall (alltså en term för varje utfall) där varje term utgörs av sannolikheten för utfallet multiplicerad med vinsten för det aktuella utfallet. (Vinst kan modelleras med positiva tal och förlust med negativa tal.) Beräkna den förväntade vinsten för spelet ovan. Spelar du gärna spelet? **(1p)**.

Lösningar hörande till material daterat 2015

Lösningar januari 2015.

PART A.

1. The operation $\oplus$ on sets is associative, that is for all sets A, B, C we have $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.
TRUE, this can be seen using Venn-diagrams.

2. The function $f(x) = x$ defined on a set A is also an equivalence relation on A. There are other functions that also have this property.
FALSE, since a function that also is an equivalence relation is reflexive it must have $(x, x) \in f$ for all $x \in A$, however, since f is also a function no other element $y \in A$ can have $(x, y) \in f$ which shows that the function $f(x) = x$ is the only function that is also an equivalence relation.

3. Let G be a connected graph. If there is only one spanning tree of G, then, in fact, G is itself a tree.
TRUE, this can be seen by studying the contrapositive statement, assume that G is a connected graph which is not a tree, then it contains a cycle, we can then choose an edge e in the cycle and for two different spanning trees, one containing e and one not containing e, hence we do not have a unique spanning tree of the graph, the contrapositive is shown (since we obviously do not have only one spanning tree of G).

4. The proposition $(p \to (q \vee r)) \vee (\neg q \wedge \neg r)$ is always true.
TRUE since it has the form $(p \to s) \vee \neg s$ which is equivalent to $(\neg p \vee s) \vee \neg s \Leftrightarrow \neg p \vee (s \vee \neg s)$ which clearly is always true since $s \vee \neg s$ is always true.

5. For all positive integers a, b we have $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$.
TRUE since $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{(a+b)-a} = \binom{a+b}{b}$. (We are using $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ with $n = a + b$ and $k = a$.)

6. On the set of all integers, $\mathbb{Z}$, the ”divides relation”, $aRb \Leftrightarrow a|b$, is a partial order relation.
FALSE since the divides relation is not antisymmetric on $\mathbb{Z}$, for example we have $-1|1$ and $1|-1$ but not $-1 = 1$.

7. Let M be any even number. Then there is no constant term in the binomial expansion of $(x + \frac{1}{x})^M$.
FALSE. If M is an even number, the binomial expansion contains an odd number of terms, the factors of the middle term then becomes $x^{M/2}$, $(x^{-1})^{M-M/2}$ and the binomial coefficient, but when multiplying these together the powers of x cancel out (since $x^{M/2} \cdot (x^{-1})^{M-M/2} = x^{M/2} \cdot x^{-M/2} = x^0 = 1$) giving a constant term (equalling the binomial coeffiecient.)

8. The number of edges in the complete graph K_n is always even when $n \geq 4$.
FALSE. For example, the number of edges in K_6 has 15 edges which is an odd number.

PART B. Sometimes only outlines of solutions are given, more details may have to be presented in order to obtain maximum points.

9. Prove that if a tree has a vertex of degree 3, then it has at least 3 leaves (vertices of degree 1).

Sol. Denote the tree with T and denote the vertex of degree 3 by v. As v has degree 3 and T is a tree, v can be regarded as the starting vertex of three non-intersecting trails of length greater than or equal to 1. Again, as T is a tree none of these trails cannot visit the same vertex twice as this would produce a cycle and a tree has no cycles. Finally each trail must end in a leaf as the graph itself only has a finite number of vertices, hence there must exist three leaves in T (the end vertices of each of the three distinct trails) which was what we wanted to prove.

10. Define the sequence of numbers $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ by $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$. Give an explicit expression of a_n. (That is solve the recurrence relation.)

Sol. This is a receurrence relation with the characteristic equation $x^2 = 2x+3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$, that is we have two distinct roots. This means that the explicit formula will have the form $a_n = A\cdot(3)^n + B\cdot(-1)^n$. Using the initital conditions $a_0 = 1$ and $a_1 = 3$ yields the two equations $A \cdot (3)^0 + B \cdot (-1)^0 = 1$ and $A \cdot (3)^1 + B \cdot (-1)^1 = 3$ which can be written $A + B = 1$ and $3A - B = 3$ which has the solution $A = 1$ and $B = 0$ giving

$$a_n = 1 \cdot (3)^n + 0 \cdot (-1)^n = 3^n.$$

11. Prove, by using mathematical induction, that $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for all $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Sol. We call the proposition that we want to prove $A(n)$, that is we have

$$A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

and we wish to prove that $\forall n \geq 1 : A(n)$. We proceed by mathematical induction and first check that $A(1)$ is true. Each $A(n)$ is true if and only if the right hand side of the equation equals the left hand side so we need to check that $LHS_1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^1 = 1$ is euqal to $RHS_1 = \frac{1(1+1)(21+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ but as we can see that both these are 1, we are done and hence we have that $A(1)$ is true.

The second step is to show that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for all relevant values of p, so assume that $A(p)$ is true for some particular value $p \geq 1$. Then we have, for this p:

$$A(p) \Leftrightarrow LHS_p = RHS_p \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

The goal now is to prove that from this follows that $A(p+1)$ is true, that is, we wish to show that

$$A(p+1) \Leftrightarrow LHS_{p+1} = RHS_{p+1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}.$$

To see that this is true we work with the left hand side:

$$LHS_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 + (p+1)^2 = LHS_p + (p+1)^2.$$

Here is where we use the inductive assumption and replace LHS_p with $RHS_p = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ which we are allowed to do precisely because we have assumed that $LHS_p = RHS_p$. We therefore have that

$$LHS_{p+1} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{(p^2+p)(2p+1) + 6(p^2+2p+1)}{6} = \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}.$$

We wish to know that $A(p+1)$ is true that is we want to know that $LHS_{p+1} = RHS_{p+1}$. So the value of RHS_{p+1} is $\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$ and expanding it algebraically we find that it is precisely equal to LHS_{p+1}. This is we have found

$$LHS_p = RHS_p \Rightarrow LHS_{p+1} = RHS_{p+1}$$

but this means that $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ which completes the second step.

The third step in the proof is to appeal to the principle of mathematical induction - as $A(1)$ is true and always $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ we apparently have

$$A(1) \text{ true} \Rightarrow A(2) \text{ true} \Rightarrow A(3)\text{true} \ldots \Rightarrow$$

by the principle of mathematical induction $\Rightarrow$

$$\forall n \geq 1 : A(n)$$

which is what we wanted to prove.

12. *Lösning saknas*

13. Show that the implication is not associative, that is show that $(p \to q) \to r$ and $p \to (q \to r)$ are not equivalent propositions.

Sol. Studying the truth values of each of the propositions $(p \to q) \to r$ and $p \to (q \to r)$ shows that they assume different truth values for $p = false$, $q = true$, and $r = false$, in which case $(p \to q) \to r$ is $false$ but $p \to (q \to r)$ is $true$.

14. Consider the Swedish word EXTRAHERAR. In how many ways can the letters of this word be rearranged to produce distinct sequences of letters?

Sol. There are 10 letters in this word but some of the letters occur several times, there is 3 R's, two A'2 and 2 E's, but the letters X, T and H occur only once. The number of possible distinct rearrangements can then be calculated by regarding the formation of such a sequence to be formed through a prcedure involving 4 steps: 1. Choose the 3 positions (out of 10 possible) where we place the R's, this can be done in $\binom{10}{3}$ ways. 2. Out of the remaining 7 positions, choose 2 where the A's are places, this can be done in $\binom{7}{2}$ ways. 3. Out of the remaining 5 positions, choose 2 where the E's are places, this can be done in $\binom{5}{2}$ ways. 4. Finally place the 3 different letters X, T, and H on the 3 remaining positions, this can be done in $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ways. Total number of ways will then be

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 6 = \frac{10!}{7!3!} \frac{7!}{5!2!} \frac{5!}{3!2!} \cdot 6 = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$$

which must then be the number of distinct rearrangements sought after.

Solutions April 2015.

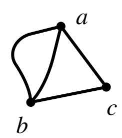
PART A.

1. For all sets A, B, C, D we have $A \times B \cap C \times D \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset \wedge B \cap D \neq \emptyset$.

Sol: This is **true** because if $A \times B \cap C \times D \neq \emptyset$ then there exists a pair $(x, y) \in A \times B \cap C \times D$, this means that $(x, y) \in A \times B$ and $(x, y) \in C \times D$ which means that x is in both A and C, so that $A \cap C$ is not empty. The same reasoning with y gives that $B \cap D$ is not empty.

2. A graph that has a Hamilton cycle automatically has an Euler cycle.

Sol: **False**, since consider the graph below:



Since we have vertices with odd degree (a and b), there cannot be any Euler cycle (visiting every edge once and return to the starting vertex) in this graph, however, $abca$, constitutes a Hamilton cycle (visiting every vertex once and returning to the starting vertex).

3. For any nonnegative integers, $k \leq n$, $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1-i}{k-i}$.

Sol: This could be true since, consider for example $\binom{4}{2}$, we can used Pascal's Identity ($\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$) to write

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{0}$$

but since $\binom{2}{0} = 1 = \binom{1}{0}$, the formula holds for $\binom{4}{2}$. Any many other n and k can be treated in the same way. But the statement is actually **false** because this does not work for $k = n = 1$.

4. A function that is injective (one-to-one) always has an inverse.

Sol: This is **false** since for example the function $f : \mathbb{N} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{N}$ is a one-to-one function, however, it has no inverse because, for example there is no $x \in \mathbb{N}$ such that $f(x) = 2$.

5. Let a, n be a positive integers. If a and n are relatively prime, there always exists a solution to the congruence $ax \equiv b \pmod{n}$, unless b is too large.

Sol: This is **false**, there is a theorem that states that the the congruence has a solution if the relative primeness holds, there is no restriction on b so b can have any value, the statement holds and the assertion in the problem, that b cannot be "too large", must therefore be false.

6. On the set of all integers, $\mathbb{Z}$, the relation, $aRb \Leftrightarrow a|b \wedge b|a$, is an equivalence relation.

Sol: This is **true**. It is easy to show the three properties, *reflexivity*, *symmetry*, and *transitivity*.

PART B. Give complete and correct solutions, write legibly. Motivate each logic step fully. No points for answers only. Each problem is worth 3 points.

7. For any three sets, A, B, C prove that $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \times B \subset B \times C$.

Proof: Pick any $(x, y) \in A \times B$. We must show that we also have $(x, y) \in B \times C$. Since $x \in A \subset B$ we get $x \in B$, similarly $y \in B \subset C$ gives $y \in C$, but then $x \in B$ and $y \in C$ gives $(x, y) \in B \times C$ which completes the proof.

8. Use the principle of inclusion/exclusion to find the number of positive integers less than or equal to 10000 that are not divisible by 6, 10 or 15.

Sol: Denote the set of all integers less than or equal to 10000 by Ω. Define the three sets A, B, C by

$$A = \{x \in \Omega; 6|x\} \qquad B = \{x \in \Omega; 10|z\} \qquad C = \{x \in \Omega; 15|x\}.$$

We are searching for the number $10000-|A\cup B\cup C|$ so therefore we seek the number $|A\cup B\cup C|$ which, by the principle of inclusion/exclusion is equal to $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$. Now we need to describe the sets $A, B, C, A\cap B, B\cap C, A\cap C, A\cap B\cap C$. The set A consists of all numbers in Ω that are divisible by 6, we can write them down, they are $6, 12, 18, ..., 6 \cdot q$, where $q = 10000/6$ where we employ integer division. (The q is from The Division Algorithm.) We get $q = 1666$ so that

$$A = \{6, 12, 18, \dots, 6 \cdot 1666\} = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, \dots, 6 \cdot 1666\}$$

and obviously A has 1666 elements so that $|A| = 1666$. Continuing in the same way we obtain $|B| = 10000/10 = 1000$ and $|C| = 10000/15 = 666$.

Now consider the set $A \cap B = \{x \in \Omega; 6|x \wedge 15|x\}$. If we factor the divisors 6 and 15 into their prime products we see that $6 = 2 \cdot 3$ and $15 = 3 \cdot 5$, for a number to be divisible by both 6 and 15, that number must contain all the prime factors $2, 3, 5$ so that those numbers are precisely the numbers that are divisible by $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ and this set is in fact $A \cap B \cap C$ since $2 \cdot 3 \cdot 5$ is the prime factorization of 30. The same reasoning can be applied to the sets $B \cap C$ and $A \cap C$ so that we in fact have

$$A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C$$

and if we call this common set Q we see that Q consists of all numbers in Ω that are divisible by 30, and there is $10000/30 = 333$ of those. Consequently, $|A \cap B| = |B \cap C| = |A \cap C| = |A \cap B \cap C| = 333$ and in conclusion

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |Q| - |Q| - |Q| + |Q| = 1666 + 1000 + 666 - 2 \cdot 333 = 2666$$

which yields that the number of integers in Ω not divisible by any of the numbers $6, 10, 15$ are $10000 - 2666 = 7334$.

9. Use the Euclidean algorithm to find the multiplicative inverse of 23 (mod 17) and use it to find all integers x that satisfy $23x \equiv 337 \pmod{17}$.

Sol: The Euclidean algorithm consists of repeated application of The Division Algorithm to 23 and 17, so we get

$$23 = 1 \cdot 17 + 6, \quad 17 = 2 \cdot 6 + 5, \quad 6 = 1 \cdot 5 + 1$$

so that $1 = 6-1\cdot 5 = 6-1\cdot(17-2\cdot 6) = 3\cdot 6-17 = 3\cdot(23-17)-17 = 3\cdot 23-4\cdot 17$. This means that the multiplicative inverse of 23 (mod 17) is 3. Hence we can multiply both sides of the congruence by 3. However, let us first reduce 337 to what it is congruent with (mod 17), we easily see that $337 \equiv 14 \pmod{17}$ so that we have the following equivalent congruences

$$23x \equiv 337 \pmod{17} \Leftrightarrow 23x \equiv 14 \pmod{17} \Leftrightarrow 3 \cdot 23x \equiv 3 \cdot 14 \pmod{17}$$

which can be written$1 \cdot x \equiv 3 \cdot 14 \pmod{17} \Leftrightarrow x \equiv 8 \pmod{17}$.

10. Let $E = \{1, 2, 3\}$ and consider $P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ - the set of all subsets of E. Prove that $P(E)$ is a partially ordered set under the relation $\subseteq$.

Proof: We can in fact show that the subset relation is a partial order on all subsets on any collection of sets, *reflexivity*: holds since $S \subseteq S$ for all sets S, *anti-symmery*: holds since if $S \subseteq T$ and $T \subseteq S$ for any sets S, T we get $S = T$, *transitivity*: holds since if $S \subseteq T$ and $T \subseteq U$ we get $S \subseteq T \subseteq U$ so that $S \subseteq U$.

11. Consider all the multiples of 4: $\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots$. Prove that if you choose 6 of these, two will always have a difference divisible by 5.

Proof: We can actually prove something even stronger: if we take *any* 6 integers, the difference betweem two of them will be divisible by 5. We proceed by considering the congruence classes modulo 5, denote them by C_0, C_1, C_2, C_3, C_4. Now if we pick any 6 integers, since all the integers are made up of all the five congruence classes, by The Pigeonhole Principle at least two of these numbers must be chosen from the same congruence class, but then if they are in the same congruence class, their difference must be divisible by 5. This will of course also be true if we happen to choose the 6 numbers from the multiples of 4.

12. Prove, by using mathematical induction, that $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ for all $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Proof: For every natural number n, denote the thing to be proved by $A(n)$, that is, write

$$A(n) \Leftrightarrow LHS_n = RHS_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Our task is to show that $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$. We proceed by mathematical induction by verifying the truth of the statement $A(1)$:

$$LHS_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \qquad RHS_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

and as $LHS_1 = RHS_1$ we obviously have that $A(1)$ is true.

The next step is to show that $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ for all natural numbers p, so we assume that $A(p)$ holds for a certain number p. This means that

$$LHS_p = RHS_p \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$$

and now we study LHS_{p+1} and try to prove that it is equal to RHS_{p+1}. One way of doing this is to show that $LHS_{p+1} - RHS_{p+1} = 0$ so we study $LHS_{p+1} - RHS_{p+1}$:

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{p+1}{p+2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} - \frac{p+1}{p+2}.$$

Here is where we use the assumption $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$ to rewrite the sum so that the expression just above is equal to

$$\frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} - \frac{p+1}{p+2} = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} - \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)}$$

which is equal to

$$\frac{p(p+2) + 1 - (p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2 + 2p + 1 - (p^2 + 2p + 1)}{(p+1)(p+2)} = 0$$

so we have reached the conclusion that $LHS_{p+1} - RHS_{p+1} = 0$, we used that $LHS_p = RHS_p$, that is we have shown that $LHS_p = RHS_p \Rightarrow LHS_{p+1} = RHS_{p+1}$, or equivalently $A(p) \Rightarrow A(p+1)$. This completes the inductive step.

Finally, we observe that $A(1)$ true $\Rightarrow A(2)$ true $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ by the principle of mathematical induction. This completes the proof.

Lösningar Kontrollskrivning 1.

1. Låt A, B, C vara godtyckliga mängder och betrakta den symmetriska differensen mellan två mängder:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Bevisa att varje element som ligger i mängden $A \triangle B \triangle C$ ligger i exakt 1 eller 3 av mängderna A, B, C.

Solution: Another way of writing the difference between two sets A, B is $A - B = A \cap B^c$. Then, by definition

$$A \triangle B \triangle C = ((A \triangle B) - C) \cup (C - (A \triangle B)) =$$
$$(((A - B) \cup (B - A)) - C) \cup (C - ((A - B) \cup (B - A))) =$$
$$(((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C^c) \cup (C \cap ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c) = M_1 \cup M_2.$$

Then, by set laws (including DeMorgan's) we get

$$M_1 = ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C^c = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) =$$
$$(A \cap (B \cup C)^c) \cup (B \cap (A \cup C)^c) = (A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))$$

and

$$M_2 = C \cap ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c = C \cap ((A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c) = C \cap ((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)).$$

But by the distributive law we have $(A^c \cup B) \cap (B^c \cup A) = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap A^c) \cup (B \cap B^c) \cup (A \cap B)$, and since $A \cap A^c = B \cap B^c = \emptyset$ we get

$$M_2 = C \cap ((A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)) = (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$$

so that

$$A \triangle B \triangle C = M_1 \cup M_2 = (A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C).$$

These four sets are all disjoint and hence every element in $A \triangle B \triangle C$ lies in precisely one of them. But the first three sets are the elements that lie in exactly one of the sets A, B, C that is in precisely 1 of them, and the fourth set is the set of all elements that lie in all of the sets, that is in 3 of them. The proof is complete.

This problem can also be solved by using Venn diagrams.

2. Använd matematisk induktion för att visa att så fort $n \geq 1$ är ett heltal så gäller
$$4 | 3^{2n-1} + 1.$$

Solution: Introduce the predicate $A(n) \Leftrightarrow 4 | 3^{2n-1} + 1$. We need to prove $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$. We do this by mathematical induction which has three steps.

1. Check that $A(1)$ is true. Is it? Well, $A(1)$ claims that $4 | 3^(2 \cdot 1 - 1) + 1$ but $3^(2 \cdot 1 - 1) + 1 = 3^1 + 1 = 4$ and we have indeed $4|4$ so $A(1)$ is true.
2. Now prove that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for all $p \in \mathbb{N}$. Accordingly assume that $A(p)$ is true for a natural number p. This means that $4 | 3^{2p-1} + 1$ which means that there exists an integer q such that $3^{2p-1} + 1 = 4q$. From this we need to show that $A(p+1)$ is true that is we need to show that $4 | 3^{2(p+1)-1} + 1$. So study $3^{2(p+1)-1} + 1$ and try to see that is it divisible by 4:
$$3^{2(p+1)-1} + 1 = 3^{2p+2-1} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2p-1} + 1 = 8 \cdot 3^{2p-1} + 3^{2p-1} + 1. \tag{1}$$
This last calculation is motivated by that we need to use the induction assumption somehow, that is, we need to use the fact that $3^{2p-1} + 1 = 4q$ for some q. Writing the expression in the above manner (1) enables us to see that
$$3^{2(p+1)-1} + 1 = 8 \cdot 3^{2p-1} + 4 \cdot q = 4 \cdot (2 \cdot 3^{2p-1} + q)$$
which is obviously divisible by 4. Hence we have show that $A(p+1)$ is true following from the truth of $A(p)$, that is the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true.
3. We get $A(1)$ true $\Rightarrow$ $A(2)$ true $\Rightarrow \ldots \forall n \in N : A(n)$ thanks to the principle of mathematical induction and the steps 1 and 2.

Lösningar Kontrollskrivning 2.

1. If p and q are two different prime numbers, prove that there are always integers s, t such that
$$sp^n + tq^n = n \tag{2}$$
for every integer n.

Solution: As p, q are different prime numbers they must be relatively prime, but the same must also apply to p^n and q^n, hence there exists integers, s', t' such that
$$s' \cdot p^n + t' \cdot q^n = 1.$$
But then, by simply putting $s = n \cdot s'$ and $t = n \cdot t'$ we obtain (2).

2. Use mathematical induction to show that 5 divides $n^5 - n$ whenever n is a nonnegative integer.

Solution: Introduce the predicate $A(n)$ for the statement that 5 divides $n^5 - n$. Now take the three steps in a proof by mathematical induction.

1. Check that $A(0)$ holds, that is check that $5 | 0^5 - 0$. But this clearly holds since it is the same thing as $5|0$ which is certainly true since 0 is divisible by any number.
2. Show that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for all $p \geq 0$. Assume that $A(p)$ holds, that is assume that there is a k such that $p^5 - p = 5 \cdot k$. We must now show that $A(p+1)$ that is there is a k' such that $(p+1)^5 - (p+1) = 5 \cdot k'$ for some k'. Now

$$(p+1)^5 - (p+1) = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1 - p - 1 = p^5 - p + 5 \cdot (p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p).$$

We have yet not used the induction assumption, but we do that by replacing $p^5 - p$ with $5 \cdot k$ in the expression above. This leads to

$$(p+1)^5 - (p+1) = 5 \cdot k + 5 \cdot (p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p) = 5 \cdot (k + p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p) = 5 \cdot k'$$

where $k' = k + p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p$. This is just another way of saying that $5|(p+1)^5 - (p+1)$ which is precisely the statement $A(p+1)$. This means that we have shown that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for each $p \geq 1$.

3. Step 1 gives that $A(0)$ is true, by step 2 this implies that $A(1)$ is true which by step 2 again gives that $A(2)$ is true and so on showing, by the principle of mathematical induction (relying on step 1 and 2), that for each $n \geq 0$ the statement $A(n)$ is true which completes the proof.

Lösningar hörande till material daterat 2016

Lösningar januari 2016.

PART A.

1. För alla icke-tomma mängder A, B, C har vi alltid $A \subseteq B \subseteq C \wedge C \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A = B = C$.
Lösning: Detta är **sant** eftersom vi kan dra slutsatsen $C \subseteq B \subseteq A$ också, så här: välj ett $c \in C$ och $b \in B$ godtyckligt. Då gäller
$$(c, b) \in C \times B \subseteq B \times A \Rightarrow (c, b) = (b', a') \in B \times A,$$
det vill säga $c = b' \in B$ och $b = a' \in A$ så att vi alltså har visat implikationerna $x \in C \Rightarrow x \in B$ och $x \in B \Rightarrow x \in A$. Men det betyder precis $C \subseteq B \subseteq A$ och eftersom vi tidigare hade $A \subseteq B \subseteq C$ måste vi ha $A = B = C$.

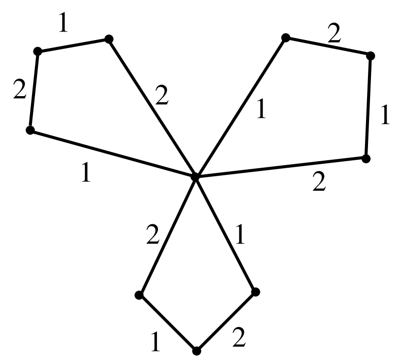
2. För alla primtal, p, q, så är följande sant: $p|q \Rightarrow p = q$.
Lösning: Detta är **sant** eftersom om vi arbetar med primtal och har $p|q$ så finns alltså ett heltal k så att $q = p \cdot k$. Men just egenskapen att q är ett primtal ger oss då att $k = 1$, det vill säga $p = q$.

3. För alla heltal, a, b, c, så är följande sant: $ab|c \wedge bc|a \wedge ac|b \Rightarrow a = b = c$.
Lösning: **Falskt** eftersom om vi väljer $a = b = 1$ och $c = -1$ så gäller $ab|c \wedge bc|a \wedge ac|b$ men inte $a = b = c$.

4. Det finns grafer med totalt 5 hörn som har egenskapen att varje hörn är förbundet (med en kant) till ett udda antal andra hörn men inte till ett jämnt antal andra hörn.
Lösning: **Falskt** eftersom i varje graf måste antalet udda hörn vara jämnt, här påstås att antalet udda hörn i en graf kan vara 5 som är ett udda tal. Går inte.

PART B.

5. Hitta **alla** minimala uppspännade träd till nedanstående graf, motivera också varför det inte finns andra minimala uppspännande träd än de som du angett.



Lösning: Benämn det centrala hörnet C. Det har grad 6. Vi ska basera våra resonemang på det hörnet. Vi inför också ordet "öra" för de delgrafer som består av hörnen och kanterna som sticker ut från C och bildar en cykel, det är tre stycken öron i den här grafen.

I varje uppspännande träd måste alla hörn ingå specifikt måste C ingå. Vidare för att trädet ska vara sammanhängande måste tre av kanterna som utgår från C som bildar ett öra också ingå, det räcker inte att ta med 2 av dessa kanter eftersom den resulterande grafen då inte blir sammanhängande. Omvänt kan vi inte ta med alla fyra kanterna eftersom vi då skapar en loop. Vi väljer alltså ett uppspännande delträd för varje öra genom att välja ut en kant av de fyra kanterna i örat som inte ska vara med.

Eftersom uppspännande träd uppstår då vi väljer bort vilken kant som helst, i varje öra, kan vi, för att åstadkomma ett minsta uppspännande träd välja bort kanten med vikt 2. En sådan kant ska väljas bort i varje öra och det kan göras på två sätt för varje öra, enligt multiplikationsprincipen blir alltså totala antalet minsta uppspännade träd $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ stycken som väljs genom att från varje öra ta bort precis en av kanterna av vikt 2.

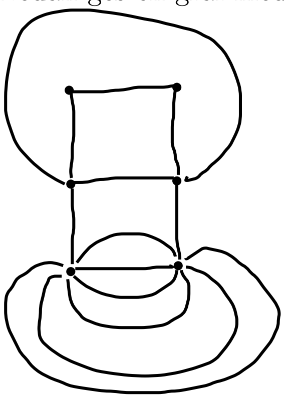
6. Solve the recurrence relation $a_{n+2} = 11a_{n+1} - 28a_n$ if $a_0 = 0$ and $a_1 = 3$. (Lös differensekvationen.)

   Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 = 11\lambda - 28 \Leftrightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5.5 \pm \sqrt{30.25 - 28} \Leftrightarrow \lambda = 5.5 \pm 1.5$ så vi har alltså de två olika rötterna $\lambda = 4$ och $\lambda = 7$. Alltså är lösningen på formen $a_n = A \cdot 4^n + B \cdot 7^n$ och med $a_0 = 0$ och $a_1 = 3$ ger detta ekvationssystemet $A + B = 0 \wedge 4A + 7B = 3 \Leftrightarrow A = -B \wedge 3B = 3 \Leftrightarrow A = -1 \wedge B = 1$ så att $a_n = 7^n - 4^n$.

7. The *degree sequence* of a graph, is the sequence of nonnegative integers that lists the degrees of each vertex in a given graph. The degree sequence of the graph above would be 2,2,2,2,2,2,2,2,2,6 because it has 9 vertices of degree 2 and 1 vertex of degree 6. Consider the two sequences 1,2,3,4,5 and 2,2,4,4,7,7. Do the following for each of these sequences: if there exists a graph with that sequence, draw it. If not explain why no graph can have that sequence as a degree sequence. Can there exist a tree with the degree sequence 2,2,4,4,7,7? Why? Why not?

   Lösning: Gradtalssekvensen 1,2,3,4,5 är omöjlig eftersom den i så fall skulle ange en graf med udda antal udda hörn (de med gradtal 1,3,5). En graf måste ju alltid ha ett jämnt antal udda hörn.

   Nedan ges en graf med gradtalssekvensen 2,2,4,4,7,7:



   Om ett träd hade gradtalssekvensen 2,2,4,4,7,7 så skulle summan av gradtalen vara 2+2+4+4+7+7 = 26. Men eftersom antalet kanter alltid är lika med 2 gånger denna summa så skulle detta "träd" ha 13 kanter, vilket omöjligt eftersom det bara finns 6 noder. Ett träd med 6 noder måste ju ha precis 5 kanter.

8. The following proof contains an error. Find the error (1p) and correct it (2p).

   Bevis: Låt n vara ett godtyckligt positivt heltal > 1. Om n är ett primtal så är n delbart med ett primtal, nämligen sig självt. Annars är n ett sammansatt tal, dvs vi kan skriva $n = a \cdot b$ där a, b är positiva heltal > 1. Välj det minsta av dessa tal, vi kan anta att det är a, då måste detta tal vara ett primtal, vi har alltså visat att n är delbart med ett primtal (a) och eftersom n var godtyckligt valt positivt heltal så är beviset klart.

   Lösning: Felet i beviset är att det finns ingenting som säger att a är ett primtal. Rättelsen lyder så här: antag att det minsta av alla positiva delare > 1 inte är ett primtal. Kalla detta minsta tal a. Eftersom a inte är ett primtal så finns p, q båda > 1 så att $a = pq$. Men då följer att $p|a|ab = n$, dvs $p|n$ och vi har hittat ett tal $p > 1$ som delar n som är strängt mindre än det minsta (som är a) av talen > 1 som delar n. Detta är en motsägelse och vi har alltså visat att a måste vara ett primtal.

9. The following statement and proof is incomplete. Fill in the missing details at every place where it reads "..." in the text. (Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.)

   Statement: For all integers $n \geq 5$ we have $2^n \geq n^2$. (För alla heltal $n \geq 5$ gäller $2^n \geq n^2$.)
   Proof: Induction over n. Introduce the name $A(n)$ for the statement $2^n \geq n^2$. We shall prove, by mathematical induction that $\forall n \geq 5 : A(n)$.

1. ...
2. Assume that the $A(p)$ holds for a particular $p \geq 5$. Now show ...
3. ...

Lösning:

1. Check that $A(5)$ is true, that is check that $2^5 \geq 5^2$ holds. But this is equivalent to $32 \geq 25$ which is certainly true. Hence $A(5)$ holds.
2. Assume that $A(p)$ holds for a particular $p \geq 5$. Now show that $A(p+1)$ also holds, that is with the support of $A(p) \Leftrightarrow 2^p \geq p^2$ show that $2^{p+1} \geq (p+1)^2$. We show this by expanding and estimating

$$(p+1)^2 = p^2 + 2p + 1 \leq p^2 + 2p + p = p(p+3) \leq p(p+p) = 2p^2. \tag{3}$$

Here we have repeatedly used that $p \geq 5$. But by the induction assumption we have $p^2 \leq 2^p$, using this to further estimate the expression above upwards we get

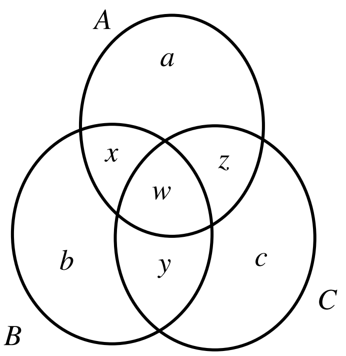
$$(p+1)^2 \leq \ldots \text{by } (3) \ldots \leq 2p^2 \leq 2 \cdot 2^p = 2^{p+1}$$

but this means precisely that $A(p+1)$ holds, that is we have shown that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ always is true whenever $p \geq 5$.

3. As $A(5)$ is true (by step 1), we get (by step 2) that $A(6)$ is true and so on. The implications continue indefinitely and by the principle of mathematical induction all integers $n \geq 5$ are reached, in conclusion $\forall n \geq 5 : A(n)$ holds which completes the proof.

10. Assume that A, B, C are three sets with no elements in all three sets (inga element ligger i alla tre mängderna). Assume further that the number of elements that lie in precisely two of the sets are 6 (antal element som ligger i precis två av mängderna är totalt 6). The set $A \triangle B \triangle C$ is defined as the set of elements which lie in precisely 1 or 3 of the sets A, B, C. Prove that $|A \cup B \cup C| = |A \triangle B \triangle C| + 6$.

Lösning: Ett Venn-diagram över situationen har följande utseende:



Här betecknar a det antal element som endast ligger i A, b det antal element som endast ligger i B och c det antal element som endast ligger i C. Vidare betecknar x det antal element som ligger i både A och B, men inte i C och y och z har motsvarande betydelser för B & C respektive C & A. Slutligen betecknar w då det antal element som ligger i alla tre mängderna.

Enligt definitionen av $|A \triangle B \triangle C|$ så gäller

$$|A \triangle B \triangle C| = a + b + c + w$$

och vidare, enligt förutsättningarna har vi $x + y + z = 6$. Men då får vi

$$|A \cup B \cup C| = a + b + c + x + y + z + w = a + b + c + 6 + w = |A \triangle B \triangle C| + 6$$

vilket var det som skulle visas. (Observera att vi aldrig behövde använda att de tre mängderna inte hade några gemensamma element.)

11. Prove the formula $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ for all positive integers $n > 0$.

Solution: Indeed,

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} =$$

$$1 \cdot \frac{n!}{(n-1)!1!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!2!} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-3)!3!} + \ldots + n \cdot \frac{n!}{(n-n)!n!} =$$

$$n \cdot \left(1 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!1!} + 2 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!2!} + 3 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-3)!3!} + \ldots + n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-n)!n!}\right) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!} =$$

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)! \cdot j!} = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \cdot 2^{n-1}.$$

12. The *Fibonacci Numbers* are recursively defined as $f_0 = 1, f_1 = 1$ and $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, for all $n \geq 0$. Set $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and consider the powers $M, M^2, M^3, \ldots$ of this matrix. Prove that

$$M^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \text{ for all } n \geq 2.$$

Solution: We construct a proof by induction over n so we introduce the predicate

$$A(n) \Leftrightarrow M^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$$

and observe that what we need to prove can be written $\forall n \geq 2 : A(n)$.

Step 1. Show that $A(2)$ holds, that is show that

$$M^2 = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

But this clearly holds as

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Step 2. Now prove that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for all $p \geq 2$. To prove the implication we must first assume that $A(p)$ holds that is

$$M^p = \begin{pmatrix} f_p & f_{p-1} \\ f_{p-1} & f_{p-2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

With the help of this assumption we need to prove that $A(p+1)$ holds, that is

$$M^{p+1} = \begin{pmatrix} f_{p+1} & f_p \\ f_p & f_{p-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Now $M^{p+1} = M \cdot M^p$ and by the induction assumption we can replace M^p using the equality (4) so that

$$M^{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_p & f_{p-1} \\ f_{p-1} & f_{p-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot f_p + 1 \cdot f_{p-1} & 1 \cdot f_{p-1} + 1 \cdot f_{p-2} \\ 1 \cdot f_p + 0 \cdot f_{p-1} & 1 \cdot f_{p-1} + 0 \cdot f_{p-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_p + f_{p-1} & f_{p-1} + f_{p-2} \\ f_p & f_{p-1} \end{pmatrix}.$$

But according to the definition of the fibonacci numbers, $f_0, f_1, f_2, \ldots$, we have $f_{p+1} = f_p + f_{p-1}$ and $f_p = f_{p-1} + f_{p-2}$ so that we have shown that (5) holds, that is $A(p+1)$ holds and in summary we have shown the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ for all $p \geq 2$.

Step 3. *We just reiterate the words of the similar solution above (to problem 9), but here we start with A(2) instead of A(5).*

Lösningar mars 2016. *Saknas.*

Lösningar augusti 2016. *Saknas.*

Solutions Kontrollskrivning 1.

1. Is the following argument correct? If it is correct, give a full account of how the conclusion follows from the premises with naming of the various rules of inference that are used. If it is not a correct argument, give an example of truth values to p, q, and r that fulfills the premises but not the conclusion. (Truth table is not allowed.)
   1. $p \to q$
   2. $q \to \neg r$
   3. $r \vee \neg q$

   $\therefore \neg p$

Solution: The argument is correct and the conclusion $\neg p$ follows in the following way:
4. p: assumption for indirect argument (indirekt härledning),
5. q: 4, 1, *Modus Ponens*
6. $\neg r$: 5, 2, *Modus Ponens*
7. r: 5, 3, *Disjunctive Syllogism*
8. $\neg r \wedge r$: 6, 7. This is a contradiction.
9. $\neg p$: 4, 5, 6, 7, 8, and indirect argument.

Remark: There are many correct solutions to this problem.

2. Use mathematical induction to show that for any integer $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Solution: Introduce the predicate $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ with the complementary notation LHS_n and RHS_n for the right-hand side and the left-hand side in this equality respectively. We need to prove $\forall n \geq 1 : A(n)$.

Step 1. Verify that $A(1)$ is true, that is that $LHS_1 = RHS_1$. Now $LHS_1 = \sum_{k=1}^{1}(3k-2) = 3\cdot 1 - 2 = 1$ and $RHS_1 = \frac{1\cdot(3\cdot 1-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$. And as $LHS_1 = RHS_1$ the statement $A(1)$ is true which completed step 1.

Step 2. Prove, that for each $p \geq 1$ the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true. Accordingly assume that $A(p)$ is true for an arbitrary $p \geq 1$. This means that $LHS_p = \sum_{k=1}^{p}(3k-2) = \frac{p(3p-1)}{2} = RHS_p$. With support of this, we need to show that $A(p+1)$ follows, that is that $LHS_{p+1} = RHS_{p+1}$. We therefore observe that

$$LHS_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(3k-2) = \sum_{k=1}^{p}(3k-2) + 3\cdot(p+1) - 2 = LHS_p + 3\cdot(p+1) - 2 =$$

$$RHS_p + 3\cdot(p+1) - 2 = \frac{p(3p-1)}{2} + 3\cdot(p+1) - 2 = \frac{p(3p-1)}{2} + \frac{6\cdot(p+1)}{2} - \frac{4}{2} =$$

$$\frac{3p^2 - p + 6p + 6 - 4}{2} = \frac{3p^2 + 5p + 2}{2}$$

We have used the induction assumption (that $A(p)$ is true) to draw this conclusion when we replaced LHS_p with RHS_p. We need to show that this is indeed equal to RHS_{p+1}. But writing out RHS_{p+1} and multiplying parenthesis together, we find that it is

$$RHS_{p+1} = \frac{(p+1)(3(p+1)-1)}{2} = \frac{3(p+1)^2 - (p+1)}{2} = \frac{3\cdot(p^2+2p+1) - p - 1}{2}$$

which has the value of $\frac{3p^2+5p+2}{2}$ which is precisely LHS_{p+1} so that $LHS_{p+1} = RHS_{p+1} \Leftrightarrow A(p+1)$ holds as a consequence of $A(p)$. Step 2 is complete.

Step 3. As $A(1)$ is true (by step 1), this implies that $A(2)$ is true, by step 2 ($p = 1$) which in turn gives that $A(3)$ is true (again by step 2) and the dominoes start falling which leads to the conclusion that $\forall n \geq 1 : A(n)$ hold. This is thanks to step 1, step 2, and the principle of mathematical induction. The proof is complete.

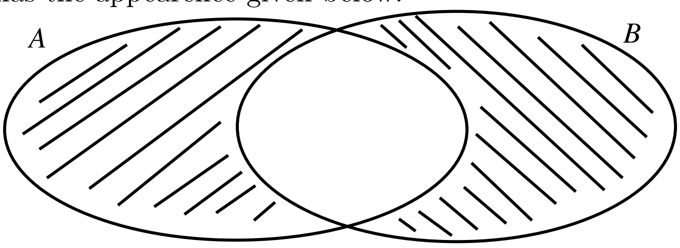
Solutions Kontrollskrivning 2.

1. Let A and B be two sets. Without using a Venn diagram, prove that

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (B - A) \cup (A - B). \tag{6}$$

Solution: By the definition of set difference and the DeMorgan Law, we have $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$. Applying the distributive law, in the same way as multiplying together the parenhesis $(a+b)(c+d)$ to find that it is $ac + ad + bc + bd$ gives that the set in question is $(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)$. And since $A \cap A^c = B \cap B^c = \emptyset$, this set is equal to $\emptyset \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup \emptyset = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B)$ which is equal to the righthand side of (6) which is what we wanted to prove.

Solution: Alternatively, we represent each side of the equation (6) with a Venn diagram. This diagram has the appearence given below.



The argument that certifies that this Venn diagram is an accurate representation of both the expressions $(A\cup B)-(A\cap B)$ and $(A-B)\cup(B-A)$ (the left- and righthand sides of (6) respectively) goes as follows: the left hand side is the union of both sets with the common elements removed, this also the shaded region of the Venn diagram. The right hand side are the union of two sets, $(A-B)$ and $(B-A)$, both of which also are represented but the diagram, $(A-B)$ is the part that is shaded with line segments leaning to the right, and $(B-A)$ is the part that is shaded with line segments leaning to the left.

2. Use mathematical induction to show that for any integer $n \geq 1$,

$$3|5^n - 2^n. \tag{7}$$

Solution: Introduce the predicate $A(n)$ for the statement that (7) is true. We will prove $\forall n \geq 1 : A(n)$.

Step 1. Verify that $A(1)$ holds: that is check that $3|5^1 - 2^1$. This is true since it is equivalent to $3|3$ which is true (any number always divides itself).

Step 2. Now prove that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ holds for each integer $p \geq 1$. Therefore assume that $A(p)$ is true for an arbitrary integer $p \geq 1$, this is *the induction assumption.* This means that $3|5^p - 2^p \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : 5^p - 2^p = 3 \cdot q$. With the support of this assumption, show that the statement $A(p+1)$ also holds, that is show that $\exists q' \in \mathbb{Z} : 5^{p+1} - 2^{p+1} = 3 \cdot q'$. Now, $5^{p+1} - 2^{p+1} = 5 \cdot 5^p - 2 \cdot 2^p = 3 \cdot 5^p + 2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 2^p = 3 \cdot 5^p + 2 \cdot (5^2 - 2^p)$. However, by the induction assumption, we have $5^p - 2^p = 3 \cdot q$ so that this last expression can be written $3 \cdot 5^p + 2 \cdot 3 \cdot q$. But then, in conclusion

$$5^{p+1} - 2^{p+1} = 3 \cdot 5^p + 2 \cdot 3 \cdot q = 3 \cdot (5^p + 2q) = 3 \cdot q' \quad (q' = 5^p + 2q)$$

and hence $A(p+1)$ is true. We have therefore shown that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ holds for each integer $p \geq 1$.

Step 3. As $A(1)$ is true (by step 1) this leads to that $A(2)$ is true (by step 2, for $p = 1$), this again leads to that $A(3)$ is true (again by step 2, for $p = 2$) and so on. We get an infinite chain of implications proving the general truth of $A(n)$ for each $n \geq 1$ and this follows from step 1 and 2 and the principle of mathematical induction. The proof is complete.

Lösningar hörande till material daterat 2017

Lösningar till januari 2017.

PART A.

1. For any sets A, B: $(A-B)^c = (B-A)^c \Rightarrow A = B$.
Solution: This is ***true*** since $(A-B)^c = (B-A)^c \Rightarrow A - B = B - A \Leftrightarrow A \cap B^c = B \cap A^c \subseteq B \Rightarrow A \cap B^c \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$. But similarly, $B \subseteq A$ so $A = B$.

2. For any statements, p, q, r, we have $p \to (q \vee r) \Leftrightarrow (p \to q) \vee r$ but not $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge r$.
Solution: This is ***true*** and this can be easily seen with truth tables.

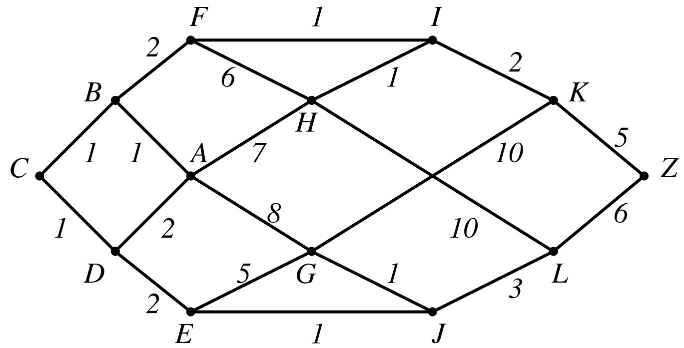
3. Let a, b, c be arbitrary positive integers. Then if $a|b$, $b|c$, and $c|a$ we must have $a = b = c$.
Solution: This is ***true*** and the proof of this is in the section on partial orders.

4. Let p be any prime number. Then, in $\mathbb{Z}_p$, we always have $\overline{(p-1)!} \neq \overline{0}$.

Solution: This is ***true*** since if we would have had $\overline{(p-1)!} = \overline{0}$, then as each element has an inverse, we could just multiply with all the inverses of $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}$ to get $\overline{p-1} = \overline{0}$ which is means $\overline{p} = \overline{1} \Rightarrow p = 1 + pk \Leftrightarrow p(1-k) = 1 \Rightarrow p|1 \Rightarrow p = 1$ which is a contradiction.

PART B. Give complete and correct solutions, write legibly. Motivate each logic step fully. No points for answers only. Each problem is worth 3 points. (Some Swedish translations are given.)

5. Use Dijkstra's algorithm on the weighted graph below to find the shortest path between the nodes A and Z. When labelling nodes, show all the candidates in every step. (Använd Dijkstras algorithm på nedanstående viktade graf. I varje steg, när du placerar ut etiketter, redovisa varje kandidatetikett.)



Solution: We take the steps in Dijkstra's algorithm. Each step shows the candidate labels in that step and the label in ***bold, italic*** font is the one(s) chosen.

1. ***B(A,1)***, D(A,2), G(A,8), H(A,7).
2. ***C(B,2)***, ***D(A,2)***, F(B,3), G(A,8), H(A,7).
3. ***F(B,3)***, H(A,7), G(A,8), E(D,4).
4. ***I(F,4)***, H(A,7), G(A,8), ***E(D,4)***.
5. K(I,6), ***H(I,5)***, G(A,8), ***J(E,5)***.
6. ***K(I,6)***, ***G(J,6)***, L(J,8).
7. ***L(J,8)***, Z(K,11).
8. ***Z(K,11)***

This means that the shortest path from A to Z is A-B-F-I-K-Z and it has cost 11. For reasons of difficulty with controlling layout, these labels are not placed into the graph above.

6. Solve the recurrence relation $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ if $a_0 = 7$ and $a_1 = 16$. (Lös differensekvationen.)

Solution: The characteristic equation is $x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, that is, it has a double root of 2. Hence the solution to the recurrence relation can be written $a_n = (An + B)2^n$, where A and B are determined by the starting values, $a_0 = 7$ and $a_1 = 16$. This gives the system of equations $(A \cdot 0 + B) \cdot 2^0 = 7$, $(A \cdot 1 + B) \cdot 2^1 = 16$ which gives $A = 1$ and $B = 7$ so that $a_n = (n+7) \cdot 2^n$.

7. *(In Swedish below.)* The following proof contains three errors. Find them and correct them.

Statement: For all nonnegative integers, $n = 0, 1, 2, \ldots$, we have $4|11^n - 7^n$.

Proof: Introduce the predicate $A(n) \Leftrightarrow 4|11^n - 7^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Step 1. Verify that $A(1)$ is true, that is check that $7|11^1 - 4^1$. But this is equivalent to $4|11 - 7$ which is true since 4 divides itself. $(11 - 7 = 4 = 1 \cdot 4.)$

Step 2. The induction step. For arbitrary integers p show that $A(p) \Rightarrow A(p+1)$. Accordingly assume that $A(p)$ is true for a certain but arbitrary integer $p \geq 0$. This means that there is an integer k such that $11^p - 7^p = 4k$. With the help of this, prove that $4|11^{p+1} - 7^{p+1}$ (which is $A(p+1)$), that is seek an integer q such that $11^{p+1} - 7^{p+1} = 4q$. Is there such a q? Well, we have $11^{p+1} - 7^{p+1} = 11 \cdot 11^p - 7^p \cdot 7 = 11 \cdot (11^p - 7^p) \cdot 7 = 11 \cdot 4k \cdot 7 = 4 \cdot 11 \cdot 7 \cdot k$ (according to the induction hypothesis: $11^p - 7^p = 4k$, which was used here) which proves the existence of a q $(= 11 \cdot 7 \cdot k)$ so that $A(p+1)$ holds. The implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is thereby shown. The proof is complete.

Solution: The first error is in the checking of the first statement is true or not, the claim includes $n = 0$ so that the test of truth of $A(1)$ is not sufficient, we must check that $A(0)$ is true and that statement is equivalent to $4|11^0 - 7^0 \Leftrightarrow 4|0$ which is clearly true since 0 is divisible by any number. The second error is in the algebraic treatment of the divisibility of $11^{p+1} - 7^{p+1}$. This expression is not equal to $11 \cdot (11^p - 7^7) \cdot 7$ but we have $11^{p+1} - 7^{p+1} = 11 \cdot 11^p - 7^p \cdot 7 = 4 \cdot 11^p + 7 \cdot 11^p - 7^p \cdot 7 = 4 \cdot 11^p + 7 \cdot 4k$, according to the induction assumption. But this then translated to $11^{p+1} - 7^{p+1} = 4 \cdot (11^p + k)$ which is $4|11^{p+1} - 7^{p+1}$ which is $A(p+1)$. So $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ which is the induction step. The third error is that the third step in the induction step is missing, it is just a matter of adding a standard formulation of the third step, complete with reference to the principle of mathematical induction/the induction axiom. We will not reiterate such a thing here even though it is required for a complete solution of this problem.

8. The following statement and proof is incomplete. Fill in the missing details at every place where it reads "..." in the text. (Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.)

Statement: For all integers $n \geq 1$ we have $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$. (För alla heltal $n \geq 1$ visa den givna likheten.)

Proof: Induction over n. Introduce the name $A(n)$ for the statement $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$. We shall prove, by mathematical induction that $\forall n \geq 1 : A(n)$.

1. ...
2. Assume that the $A(p)$ holds for a particular $p \geq 1$. Now show ...
3. ...

Solution:

1. First show that $A(1)$ is true, that is show that $\sum_{k=1}^{1}(3k^2 - 3k + 1) = 1^3$. Is this true? The left hand side is $3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$ and the right hand side is $1^3 = 1$ and as these two are equal $A(1)$ holds true.
2. Assume that the $A(p)$ holds for a particular $p \geq 1$. Now show ...
3. ...

9. You have 3 identical blue balls, 2 identical red balls and one yellow ball and three distinct baskets. In how many ways can you distribute all the balls into the baskets? (Any number of balls in any basket.)
Solution: Since the process of placing the balls consist of three independent steps, we can see that process as having three steps: 1. Place the blue balls. 2. Place the red balls. 3. Place the yellow ball. As we are allowed to place the balls into the 3 baskets any which way we want, there are $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ ways to place the three blue balls. Similarly the two red balls can be places in $\binom{3+2-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ ways and the last yellow ball can be placed in 3 ways. Total number of ways to perform the whole procedure will therefore be $10 \cdot 6 \cdot 3 = 180$ ways hence there are 180 ways to place the balls as specified.

11. Use mathematical induction to prove the following statement: each nonempty set of positive integers has a smallest member. (Hint: Introduce the predicate $A(n) =$ each set with n elements has a smallest member. Now prove $\forall n \geq 1 : A(n)$.)

Solution: We will first prove that the statement holds for all finite sets, that is we will prove that $\forall n \geq 1 : A(n)$. This is a straight forward proof by induction in three steps:

1. Check that $A(1)$ holds, that is "each set consisting of precisely 1 element has a smallest member". This is obviously true since the smallest element in an arbitrary set with precisely one element is that one element itself. Step 1 is completed.
2. Now take the induction step, that is assume that for an arbitrary integer $p \geq 1$, $A(p)$ holds. With the support of this prove that $A(p+1)$ also holds. Accordingly assume that we have an arbitrary set with $p+1$ elements, call this set E. Choose any element from this set, call this element x. Now form the set $E - \{x\}$. This is a set with p elements. Since $A(p)$ holds, $E - \{x\}$ has a smallest element, call this element y. Now there are two cases, either $x < y$ or $y < x$. If the first case holds, then E has a smallest element and it is x. In the second case, again E has a smallest element and it is y. In any case, apparently, E has a smallest element. And since E was an arbitrarily chosen set with $p+1$ elements $A(p+1)$ holds. We have therefore prove the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ which completes step 2 of the proof.
3. As $A(1)$, step 2 gives us $A(2)$, which again yields $A(3)$ and so on. More formally the state is that since $A(1)$ holds, and the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ holds for all $p \geq 1$, the induction axiom yields $\forall n \geq 1 : A(n)$ which completes the proof.

What we have from the above statement is that all nonempty *finite* sets have a smallest element. However, the step to show that all nonempty sets have a smallest element is easy, let F be an arbitrary infinite set of positive integers. Then there is a (possibly large) integer z which can act as a sort of divisor, the set of integers in F smaller than z is nonempty (if z is chosen large enough) so that the set of all integers in F smaller than z is a finite set of positive integers. According to the statement above, there is a smallest element m among these. Apparently m must then also be the smallest element of F which completes the proof for all sets, finite and infinite.

12. Denote by $\mathbb{N}$ the set of all positive integers, $\{1, 2, 3, \dots\}$. The Euler ϕ-function (which is important in cryptography) is defined on $\mathbb{N}$ as follows

$\phi(x) =$ the number of elements in $\mathbb{N}$ less than or equal to x which are relatively prime to x.

For example $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 1$, $\phi(6) = 2$ and for each prime number p, $\phi(p) = p - 1$ since all the numbers $1, 2, \dots, p-1$ are relatively prime to p. Let p, q be two distinct prime numbers. Prove that $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$.

Solution: Consider the set of pq elements, $X = \{1, 2, 3, \dots, pq\}$. From this set we wish to remove all integers that are not relatively prime to x. We can then form two sets: A, the set of elements in X not relatively prime to p and B, the set of elements in X not relatively prime to q. Since p is a prime number, we have $A = \{p, 2 \cdot p, ..., (q-1) \cdot p, q \cdot p\}$, that is all the multiples of p. (The only way for any number to be not relatively prime to a prime number is to be a multiple of this number so this is why set has precisely these members). We note that $|A| = q$. Similarly, we have $B = \{q, 2 \cdot q, \dots, (p-1) \cdot q, p \cdot q\}$, and $|B| = p$. We also seek the set $A \cap B$, now again, as p and q are prime numbers, the only way for an integer to be both a multiple of p and a multiple of q is to be a multiple of pq, and the only multiple of pq in both A and B is pq itself. Hence $A \cap B = \{pq\}$, and $|A \cap B| = 1$. Now by the principle of inclusion and exclusion we have

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = q + p - 1.$$

And since $\phi(pq) = |X - A \cup B| = pq - |A \cup B| = pq - (q + p - 1) = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1)$ the proof is complete.

Lösningar april 2017.

PART A. Even though motivations are not needed in the exam, we give motivations here.

1. If the implications $p \to q$, $q \to r$, $r \to p$ all hold, then p, q, r are either all true or either all are false. Om alla ovanstående implikationerna gäller så är utsagorna (p, q, r) antingen alla sanna eller så är alla falska.

Solution: This is **true** since, by hypothetic syllogism we get, $q \to p$, that is $p \leftrightarrow q$ and so p and q always have the same truth value, and this same line of reasoning can be applied to all statements. Hence they are either all true or all false.

2. For all positive integers, n, if $3^n \equiv 1 \pmod 8$, then n is even. För alla positiva heltal, n, om kongruensen gäller så måste n vara jämnt.

Solution: This is **true** and can be seen by instead seeing that the contraposition: n *not* even $\Rightarrow 3^n \not\equiv 1 \pmod 8$. The proof for this goes as follows: n *not* even $\Leftrightarrow n = 2k+1$, for some positive integer k which gives $3^n = 3^{2k+1} = 9^k \cdot 3 \equiv 1^k \cdot 3 = 3 \not\equiv 1 \pmod 8$.

3. Let a, b denote arbitrary positive integers, then $a^2|b \wedge b^2|a \Rightarrow a|b^2 \wedge b|a^2$. För godtyckliga positiva heltal, a, b gäller implikationen $a^2|b \wedge b^2|a \Rightarrow a|b^2 \wedge b|a^2$.

Solution: This is **true**. This can be seen by observing that the statements $a^2|b$ and $b^2|a$ are actually quite strong and they even imply $a|b$ and $b|a$ which for positive integers gives us the stronger statement $a = b$ which in turn implies $a|b^2 \wedge b|a^2$.

4. The symbol $\subseteq$ is the ususal symbol for subset relations but sometimes the symbol $\subset$ is used to express a more strict relation between two sets, then $A \subset B$ means that A is a subset of B but also that $A \neq B$. The proposition that you need to evaluate is: if $A \subset C$ and $A \subseteq B \subseteq C$, then $A \subset B$ or $B \subset C$ also holds. Symbolen $\subseteq$ är den vanliga symbolen för delmängdsförhållanden men ibland används symbolen $\subset$ för att uttrycka en mer strikt relation mellan två mängder, då betyder $A \subset B$ att A är en delmängd av B men också att $A \neq B$. Påståendet som du ska utvärdera är: om $A \subset C$ och $A \subseteq B \subseteq C$, så har vi också $A \subset B$ eller $B \subset C$.

Solution: This is **true**. To see this we first observe that if E and F are two sets, the statement $E \subset F$ means $E \subseteq F \wedge E \neq F$. Suppose that neither of $A \subset B$ and $B \subset C$ were true. Then both would be false so that we would have $\neg(A \subseteq B \wedge A \neq B)$ and $\neg(B \subseteq C \wedge B \neq C)$, which by DeMorgan's laws are the same as $\neg(A \subseteq B) \vee A = B$ and $\neg(B \subseteq C) \vee B = C$, but as both $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$

hold we conclude, by disjunctive syllogism, that $A = B$ and $B = C$ both must be true. However, then $A = B = C$ which contradicts $A \subset C$. Hence the supposition that neither of $A \subset B$ and $B \subset C$ were true can not be correct, that is one of them must be true which is what we wanted to prove.

PART B. 8 problems each worth 3 points. Give complete and correct solutions, write legibly. Normally full motivations required (***no*** points for answers only). Some Swedish translations are given.

5. Solve the recurrence relation $a_{n+2} = 5a_{n+1} + 14a_n$ if $a_0 = 5$ and $a_1 = 8$. (Lös differensekvationen.)

Solution: The characteristic equation for the recurrence relation is $x^2 = 5x+14$ which can be rewritten as $x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = 2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - (-14)} \Leftrightarrow x = 2.5 \pm 4.5 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 7$. This means that the solution to the recurrence relation can be written $a_n = A\cdot(-2)^n + b\cdot 7^n$ and substituting this into the equations $a_0 = 5$ and $a_1 = 8$ yields the equations $a_0 = 5 = A\cdot(-2)^0 + b\cdot 7^0$ and $a_1 = 8 = A\cdot(-2)^1 + b\cdot 7^1$ that is, $A + B = 5$ and $-2A + 7B = 8$. This is a system of two equations (solved by Euler elimination) yielding $B = 2$ and $A = 3$ so that the final answer to this problem reads $a_n = 3 \cdot (-2)^n + 2 \cdot 7^n$.

6. Consider the relation $\mathcal{R}$ on the integers $\mathbb{Z}$ defined by $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \pmod 7$. Prove that $\mathcal{R}$ is an equivalence relation **(2p)**. There are four equivalence classes, which are they? **(1p)** (No motivation needed.) Betrakta relationen $\mathcal{R}$ definerad ovan. Visa att den är en ekvivalensrelation **(2p)**. Den har fyra ekvivalensklasser. Ange dem. **(1p)** (Utan motivering.)

Solution: We need to show three things: that $\mathcal{R}$ is reflexive, symmetric and transitive.

Reflexivity: Show that for each $x \in \mathbb{Z}$ we have $x\mathcal{R}x$. Is this true? Do we have $x^2 \equiv x^2 \pmod 7$ for all $x \in \mathbb{Z}$? Of course we do, the integer x^2 is congruent with itself. So $\mathcal{R}$ is reflexive.

Symmetry: Here we need to show that $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}y$. This holds due to the to following consequence of the symmetry of the congruence relation: $x^2 \equiv y^2 \pmod 7 \Leftrightarrow y^2 \equiv x^2 \pmod 7$

Transitivity: Indeed, the transitivity of the congruence relation also yields transitivity of $\mathcal{R}$ since $x^2 \equiv y^2 \pmod 7 \wedge y^2 \equiv z^2 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv z^2 \pmod 7$. This simply means $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ which is transitivity of $\mathcal{R}$.

Now given that we have four equivalence classes we only need to find four nonrelated integers to represent these classes. The first that comes to mind is 0, and $\bar{0} = \{z \in \mathbb{Z}; z^2 \equiv 0 \pmod 7\}$. As 7 is a prime number we also have $x^2 \equiv 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$ so that the first equivalence class is $\{x; x \equiv 0 \pmod 7\}$. Then if we denote the conguence classes modulo 7 $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, apparently we have $\bar{0} = c_0$. Further since for example $(7k+2)^2 \equiv 4 \pmod 7$ and also $(7k+5)^2 \equiv 4 \pmod 7$ we get $c_2 \cup c_5 \subseteq \bar{2}$, in this way we can also see that $c_3 \cup c_4 \subseteq \bar{3}$ and finally $c_1 \cup c_6 \subseteq \bar{1}$. As we are studying an equivalence relation and the classes partition $\mathbb{Z}$ and $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ exhausts $\mathbb{Z}$, we conclude that we have in fact equality in these relations so that we actually have the equivalence classes constituted by $\bar{0} = c_0$, $\bar{1} = c_1 \cup c_6$, $\bar{2} = c_2 \cup c_5$, and $\bar{3} = c_3 \cup c_4$.

7. Let G be a graph with the following property: if you remove a certain edge, the resulting graph is a tree. Prove that the sum of all degrees of all vertices in G is two times the number of vertices in G.

Solution: Introduce the notation $G = (V, E)$ where V is the set of vertices in G and E is the set of edges in G. Further, introduce the set E' to denote the set of edges where the edge is removed yet the resulting graph $((V, E'))$ is a tree. In a tree the number of edges is precisely one less than the number of edge, hence we have $|E'| = |V| - 1$. By the construction of E' and E we also have $|E| - 1 = |E'|$, but this yields $|E| = |V|$ so that G has precisely the same number of edges as vertices. Now Euler's theorem for graphs states that

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

but $|E| = |V|$ substituted into this equation yields the desired result.

8. The following statement and proof is incomplete. Fill in the missing details at every place where it reads "..." in the text. (Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.)

Statement:
For all nonnegative integers n we have $7|2^{3n}-1$. (För alla heltal $n \geq 0$ visa den givna likheten.)

Proof: Induction over n. Introduce the name $A(n)$ for the statement $7|2^{3n}-1$. We shall prove, by mathematical induction that $\forall n \geq 0 : A(n)$.

1. ...
2. Assume that the $A(p)$ holds for a particular $p \geq 0$. Now show ...
3. ...

Solution: The proof can be completed as follows:

1. Check that $A(0)$ holds, that is check that $7|2^{3\cdot 0}-1$. But since $3^0 = 1$ this is equivalent to $7|0$ which is true since 0 is divisible by 7.
2. Assume that the $A(p)$ holds for a particular $p \geq 0$. Now show that $A(p+1)$ becomes true as a result of this. This means that we will have proven the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ for each integer $p \geq 0$. The assumption that $A(p)$ is true can also be written $\exists k \in \mathbb{Z} : 2^{3\cdot p}-1 = 7k$. With the help of this we need to prove that also $7|2^{3\cdot(p+1)}-1$, that is we want to prove that there exists an integer k' such that $2^{3\cdot(p+1)}-1 = 7k'$. Now $2^{3\cdot(p+1)}-1 = 8\cdot 2^{3p}-1 = 7\cdot 2^{3p}+1\cdot 2^{3p}-1$ but according to the induction hypothesis this can be written
$$7\cdot 2^{3p}+2^{3p}-1 = 7\cdot 2^{3p}+7k = 7\cdot(2^{3p}+k)$$
and what works as k' is hence $2^{3p}+k$ so that also $A(p+1)$ is true. Hence we have shown the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ for all integers $p \geq 0$.
3. So $A(0)$ is true (by step 1), and this together with step 2 with $p=0$ yields that also $A(1)$ is true and another application of step 2 with $p=2$ gives that $A(2)$ is true and so on. In summary, step 1 and 2 and the principle of mathematical induction gives $\forall n \geq 0 : A(n)$ which is what we wanted to prove.

9. The following proof contains at least three errors. Find them and correct them.

Statement: For all nonnegative integers n, we have $2^n < (n+2)!$.

Proof: Denote by $A(n)$ the predicate $2^n < (n+2)!$. Prove, by mathematical induction $\forall n \geq 0 : A(n)$. Also write LHS_n and RHS_n for the left- and righthand sides of $A(n)$ respectively.

Step 1. Verify that $A(0)$ holds, that is check that $LHS_0 < RHS_0$. Is this true? $LHS_0 = 2^0 = 1$ and $RHS_0 = (0+2)! = 2$ and $1 < 2$ so $A(0)$ holds true.

Step 2. Take the inductive step, that is show that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ holds for all relevant p. Accordingly assume that $A(p) \Leftrightarrow LHS_p < RHS_p \Leftrightarrow 2^p < (p+2)!$ is true for an arbitrary $p \geq 1$. Now we can study $RHS_{p+1} - LHS_{p+1} = (p+1+2)! - 2^{p+1} = (p+3)! - 2^{p+1}$ and we wish to show that it is positive. By the induction assumption we have $(p+2)! > 2^p$ and this can be used to write

$$RHS_{p+1} - LHS_{p+1} = (p+3)! - 2^{p+1} = (p+3)\cdot(p+2)! - 2\cdot 2^p > (p+3)\cdot 2^p - 2\cdot 2^p >$$
$$(p+3)\cdot 2^p - 2\cdot 2^1 \geq (p+3)\cdot 2^1 - 4 = 2p+6-4 = 2p+2 > 0$$

so that $RHS_{p+1} - LHS_{p+1} > 0 \Leftrightarrow A(p+1)$ is true and we have shown that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true.

Step 3. In summary we have $A(0)$ true - by step 1 - $\Rightarrow A(1)$ true - by step 2 - $\Rightarrow A(2)$ is true - again by step 2 - and step 2 applied again and again allows us to cover all the nonnegative integers showing that $A(n)$ is true for all $n \geq 0$. The proof is complete.

Solution: The first error is that $p \geq 1$ is assumed, when $p \geq 0$ is necessary. The second error is in the estimation $(p+3)\cdot 2^p - 2\cdot 2^p > (p+3)\cdot 2^p - 2\cdot 2^1$, this must rewritten adn one correct estimate is
$$(p+3)\cdot 2^p - 2\cdot 2^p = (p+3-2)\cdot 2^p = (p+1)2^p > 0.$$
The third error is that step 3 lacks a reference to the principle of mathematical induction so the text "by the principle of mathematical induction" needs to be added just after the text "cover all the nonnegative integers".

10. Denote by $\mathbb{N}$ the set of all positive integers, $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Consider the relation $\mathcal{R}$ defined on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
$$(x, y)\mathcal{R}(z, w) \Leftrightarrow x \leq z \vee y|w.$$

Prove that $\mathcal{R}$ is reflexive **(1p)**, ***not*** anti-symmetric **(1p)**, and ***not*** transitive **(1p)**. Definera relationen $\mathcal{R}$ som ovan. Visa att $\mathcal{R}$ är reflexiv **(1p)**, ***inte*** antisymmetrisk **(1p)** och ***inte*** heller transitiv **(1p)**.

Solution: For an arbitrary (x, y) we of course have $x \leq x$ so that $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$, that is (x, y) is always related to itself so that reflexivity holds. To prove that this relation is not anti-symmetric we must find (x, y) and (z, w) that has $(x, y)\mathcal{R}(z, w)$ but not $(z, w)\mathcal{R}(x, y)$. We could for example choose $(x, y) = (3, 1)$ and $(z, w) = (5, 10)$. Then as $3 \leq 5$ we have $(x, y)\mathcal{R}(z, w)$ but as none of $10 \leq 1$ of $5|3$ holds we do not have $(z, w)\mathcal{R}(x, y)$. Hence the relation is not symmetric. To show that it is not transitive, similarly we need to exhibit (x, y), (z, w), and (s, t) that have $(x, y)\mathcal{R}(z, w)$ and $(z, w)\mathcal{R}(s, t)$ but not $(x, y)\mathcal{R}(s, t)$. Again examples of such pairs are

$$(x, y) = (17, 5), \quad (z, w) = (13, 10), \quad (s, t) = (15, 7).$$

The reader can check that $(x, y)\mathcal{R}(z, w)$ and $(z, w)\mathcal{R}(s, t)$ but that $(x, y)\mathcal{R}(s, t)$ does not hold. The relation is not transitive.

11. Låt A stå för en mängd av heltal. Beteckna med $|A|$ antal element i A. Tex gäller $|\{1, 3, 5\}| = 3$. Låt nu E vara en ändlig icketom mängd av positiva heltal (vilken som helst). Bevisa att

$$x, y \in E \wedge x|y \Rightarrow \ |\{z \in E; x|z\}| \geq \ |\{z \in E; y|z\}|\,.$$

Lösning: Vi visar en ännu starkare sak: nämligen att

$$M_1 = \{z \in E; y|z\} \subseteq \{z \in E; x|z\} = M_2$$

och vi visar detta genom att visa att $e \in M_1 \Rightarrow e \in M_2$, så välj ett godtycligt $e \in M_1$. Det betyder att

$$e \in E \wedge y|e.$$

Men eftersom $x|y$ får vi också $x|e$ det tillsammans med $e \in E$ betyder att $e \in M_2$ vilket i sin tur ger $M_1 \subseteq M_2$ men detta ger förstås att $|M_1| \leq |M_2|$ vilket var vad som skulle bevisas.

12. Prove *Wilson's Theorem*, that is prove that if p is a prime number, then

$$(p-1)! \equiv \ -1 \pmod{p}.$$

Hint: Consider the solutions to the congruence $x^2 = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_p$.

Solution: A solution exists in the course material on the subjects of congruences.

Lösningar till kontrollskrivning 1 2017.

1. For sets E and F in general, the set difference $E - F$ is defined as the set $E \cap F^c$. This means that any set difference can be rewritten without the minus sign using this definition. Using this way of rewriting set expressions, let A and B be arbitrary sets and then show that

$$B - A = A^c - (A^c - B)$$

Hint: Rewrite each of the left and right hand sides of $B - A = A^c - (A^c - B)$ so that no minus signs occur. You should arrive at the same expression for both sides. Venn diagrams cannot be used to solve this problem.

Solution: Rewriting the right hand side using the given definition we obtain, after eliminating both minus signs,

$$A^c - (A^c - B) = A^c \cap (A^c - B)^c = A^c \cap (A^c \cap B^c)^c = A^c \cap ((A \cup B)^c)^c = A^c \cap (A \cup B)$$

where we have also used one of the DeMorgan's laws and the rule about double complement for sets. Now using the distributive law for sets we continue to rewrite this as follows,

$$A^c \cap (A \cup B) = (A^c \cap A) \cup (A^c \cap B) = \emptyset \cup (A^c \cap B) = A^c \cap B$$

but this is instantly recognized as the left hand side $(B - A)$ rewritten with the given definition. The proof is complete.

2. Use mathematical induction to show that for any integer $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n}(6k-1) = 3n^2 + 2n.$$

Solution: Introduce the predicate $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(6k-1) = 3n^2 + 2n$. We need to show that
$$\forall n \geq 1 : A(n)$$
is true. To further clarify the proof we also introduce the notations LHS_n and RHS_n for the left and right hand sides of $A(n)$ respectively. Accordingly we have $A(n) \Leftrightarrow LHS_n = RHS_n$. We now take the three steps of a proof based on mathematical induction. In this proof the second step will be more detailed and divided into three substeps: *(a)* the induction hypothesis (*induktionsantagandet*), *(b)* processing (*bearbetning*), and *(c)* the conclusion (*slutsatsen*). Everyone is encouraged to take a look at this more detailed version of a proof by mathematical induction.

Step 1. Prove that $A(1)$ holds true. To prove this we just verify that $LHS_1 = RHS_1$. We therefore calculate these respectively:
$$LHS_1 = \sum_{k=1}^{1}(6k-1) = 6 \cdot 1 - 1 = 6 - 1 = 5,$$
and
$$RHS_1 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5$$
and as $LHS_1 = RHS_1$ we conclude that $A(1)$ is true which completes step 1 of the proof.

Step 2. In this step we must show that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ always is true whenever $p \geq 1$ is an integer.

Substep *(a)*, the induction hypothesis (*induktionsantagandet*): to prove an implication we must first assume the hypothesis (*förledet*) of the implication. This is **extremely** important, it is the foundation of a proof by mathematical induction, must always make the induction hypothesis in a proof like this. Accordingly we make the assumption that $A(p) \Leftrightarrow LHS_p = \sum_{k=1}^{p}(6k-1) = 3p^2 + 2p = RHS_p$ holds for an arbitrary integer $p \geq 1$.

Substep *(b)*, processing (*bearbetning*): using the power of the induction hypothesis we shall prove that $A(p+1) \Leftrightarrow LHS_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(6k-1) = 3(p+1)^2 + 2(p+1) = RHS_{p+1}$. We therefore process LHS_{p+1} by rewriting it using the mathematical laws available to us. When we do this we know that we must use the induction hypothesis somewhere and reach the goal of showing that it (LHS_{p+1}) is equal to RHS_{p+1}. Accordingly we write
$$LHS_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(6k-1) = \sum_{k=1}^{p}(6k-1) + 6 \cdot (p+1) - 1 = \sum_{k=1}^{p}(6k-1) + 6p + 5.$$
At this point it is appropriate to use the power of the induction hypothesis which says that $\sum_{k=1}^{p}(6k-1) = 3p^2 + 2p$ and therefore we can replace $\sum_{k=1}^{p}(6k-1)$ above with $3p^2 + 2p$ so that we can write
$$LHS_{p+1} = 3p^2 + 2p + 6p + 5 = 3p^2 + 8p + 5.$$
It is our goal to show that this is eventually equal to RHS_{p+1} and by studying the expression for RHS_{p+1} we will see that this is indeed true. Computing again, we obtain
$$RHS_{p+1} = 3(p+1)^2 + 2(p+1) = 3 \cdot (p^2 + 2p + 1) + 2p + 2 = 3p^2 + 6p + 3 + 2p + 2$$
which is indeed equal to LHS_{p+1}. This shows that $A(p+1)$ is true (because, remember $A(p+1) \Leftrightarrow LHS_{p+1} = RHS_{p+1}$).

Substep *(c)*, conclusion (*slutsats*): We have assumed that $A(p)$ is true for an arbitrary positive integer p. Using this we have be able to prove that also $A(p+1)$ holds true. The conclusion we therefore draw is that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ must be true for all positive integers p.

Substep *(c)* completes step 2 in the proof.

Step 3. As $A(1)$ is true (by step 1) we also get that $A(2)$ is true (by using step 2 with $p = 1$). This, with a second application of step 2 with $p = 2$ yields that $A(3)$ is true and so on. With the help of step 1 and step 2 and the principle of mathematical induction we draw the conclusion $\forall n \geq 1 : A(n)$ which completes the proof.

Comment: this proof is overly detailed. It is meant to clarify what is needed for a complete proof of mathematical induction. Once you have understood what each step means, you are in a better position to understand how to make induction proofs and also how to write them correctly. So do not be intimidated by the lengthy formulation. Once you have mastered proofs by induction, your formulations can be much shorter.

Lösningar till kontrollskrivning 2 frå 2017.

1. Is the following argument valid?

1. $p \to q$
2. $q \to (\neg r \vee \neg p)$

$\therefore\ \neg r \vee \neg p$

Solution: The argument is valid and a correct argument goes as follows:

3. p, assumption for proof by division into cases, case 1.
4. q, 3, 1, Modus Ponens.
5. $\neg r \vee \neg p$, 4, 2, modus Ponens. Case 1 complete.
6. $\neg p$, assumption for proof by division into cases, case 2.
7. $\neg r \vee \neg p$, 6, Case 2 complete.
8. $\neg r \vee \neg p$, 3-7, and proof by division into cases.

Alternative solution: A truth table can also be built and in this table, on all the rows that the premises 1 and 2 are true, it can be seen that the conclusion also is true. Hence the conclusion follows from the two premises. We will not present the truth table here.

2. Use mathematical induction to show that for any integer $n \geq 1$,

$$4 | 11^n - 7^n.$$

Solution: We will present the extended formulation of proofs by induction where the second step is divided in to the three substeps (a) induction hypothesis, (b) processing of results, and (c) conclusion. Introduce the predicate

$$A(n) \Leftrightarrow 4 | 11^n - 7^n.$$

We shall prove $\forall n \geq 1 : A(n)$.

Step 1. Prove that $A(1)$ holds. We shall verify that $4 | 11^1 - 7^1$, but this is the same as to say that $4|4$ which is true since each number divides itself. $A(1)$ is true.

Step 2. We wish to prove that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true and here we subdivide the proof into the three more detailed substeps for further clarity.

(a) Induction hypothesis: assume that $A(p)$ holds true for some particular $p \geq 1$. This means that we have $4 | 11^p - 7^p \Leftrightarrow 11^p - 7^p = 4q$ for some integer q. Hence we have $11^p = 4q + 7^p$.

(b) Processing: now use the information in the induction hypothesis (a) to show that $A(p+1)$ holds, that is show that $4 | 11^{p+1} - 7^{p+1}$. How to do this? Well, we have $11^{p+1} - 7^{p+1} = 11 \cdot 11^p - 7 \cdot 7^p = 11 \cdot (4q + 7^p) - 7 \cdot 7^p = 11 \cdot 4q + 4 \cdot 7^p$, here we have used the expression $11^p = 4q + 7^p$ that is a reformulation of the induction hypothesis. This means that $11^{p+1} - 7^{p+1} = 4 \cdot (11q + 7^p)$ but this is clearly divisible by 4 so $A(p+1)$ holds.

(c) Conclusion: we assumed that $A(p)$ was true and derived from that the truth of $A(p+1)$, hence the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ must be true which concludes step 2 of the proof.

Step 3. $A(1)$ is true (by step 1), this gives, with step 2, $p = 1$, that $A(2)$ also is true. Similarly, this implies that $A(3)$ is true, again by step 2 but with $p = 3$. Thre argument contiues in a similar way and step 1 and step 2 together with the principle of mathematical induction assures that all integers $n \geq 1$ are covered. Hence $\forall n \geq 1 : A(n)$ which completes the proof.

Lösningar hörande till material daterat 2018

Lösningar till januaritentamen. *Saknas*

Lösningar till apriltentamen.

PART A.

1. For arbitrary sets, A, B, C, the following holds (För godtyckliga mängder A, B, C gäller följande):

$$(A - (B \cap C))^c = (A - B)^c \cap (A - C)^c.$$

Solution: This **true** correct and can be seen by the following sequence of rewritings:

$$(A - (B \cap C))^c = (A \cap (B \cap C)^c)^c = A^c \cup (B \cap C) = (A^c \cup B) \cap (A^c \cup C) =$$
$$(A \cap B^c)^c \cap (A \cap C^c)^c = (A - B)^c \cap (A - C)^c.$$

2. If a, b, c, d are positive integers with $ab|cd$, $ac|bd$, $ad|bc$, $bc|ad$, $bd|ac$, and $cd|ab$, then $a = b = c = d$. Om a, b, c, d är positiva heltal med alla delbarhetsrelationer uppfyllda som anges ovan, då måste dessa fyra tal i själva verket vara ett och samma tal ($a = b = c = d$).

Solution: This is **true** and can be seen by observing that since $ab|cd$ and $cd|ab$ we have $ab = cd$ and similarly $ac = bd$ and $ad = bc$. Multiplying $ac = bd$ by b gives $abc = b^2 d$ and using $ab = cd$ gives $c^2 d = b^2 d$ which yields $c^2 = b^2$. Since all numbers are positive this gives $c = b$. Since this all is symmetric in a, b, c, d we can similarly obtain $a = b$ and $c = d$.

3. Let p, q, r denote logical propositions. (Låt p, q, r beteckna logiska utsagor.) If the following implications hold: $p \vee q \to r$, $q \vee r \to p$, and $p \vee r \to q$, then the three implications $r \to p \wedge q$, $p \to q \wedge r$, and $q \to p \wedge r$ also hold. (Om de tre första implikationerna är sanna så är även de tre följande implikationerna sanna.)

This is **true** and can be seen with a truth table:

p	q	r	$p \vee q \to r$	$q \vee r \to p$	$p \vee r \to q$	$p \to q \wedge r$	$q \to p \wedge r$	$r \to p \wedge q$
s	s	s	s	s	s	s	s	s
s	s	f	f	s	s	-	-	-
s	f	s	s	s	f	-	-	-
s	f	f	f	s	f	-	-	-
f	s	s	s	f	s	-	-	-
f	s	f	f	f	s	-	-	-
f	f	s	s	f	f	-	-	-
f	f	f	s	s	s	s	s	s

Observe that we do not need to compute the truth values of the implications on the right because we are only asking if these three implications are true as a result of all the premises (the three implications to the left) are true and this happens only on the first and last row of the table. On the first and last row the implications to the right are certainly true. Indeed we can even say something stronger and that is that if the three implications of the premises are true, then we in fact have $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$, that is p, q, r always have the same truth value.

4. Let $\gcd(a, b)$ denote the greatest common divisor of the integers a, b. (Beteckna med $\gcd(a, b)$ största gemensamma delaren till heltalen a, b.) For arbitrary integers a, b, x, we then have: if $\gcd(a, x) = 1$ and $gcd(b, x) = 1$ then $\gcd(ax, bx) = x^2 \gcd(a, b)$. För godtyckliga heltal a, b, x gäller då den givna implikationen.

This is **false** because if $\gcd(a, x) = \gcd(b, x)$, then by the fundamental theorem of arithmetic, we can factor out x as implied in the formula, but as x is a *common* divisor (factor) having it in both products ax and bx will not add x^2 to the $gcd(ax, bx)$.

PART B.

5. Use the Euclidean algorithm to find the multiplicative inverse of 11 modulo 31 and use that inverse to find all integers x that satisfy $11x \equiv 5 \pmod{31}$. Använd Euklides algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 11 modulo 31 och använd den inversen för att finna alla heltal x som uppfyller $11x \equiv 5 \pmod{31}$.

Solution: The Euclidean algorithm employed yields:

$$31 = 2 \cdot 11 + 9 \qquad 11 = 1 \cdot 9 + 2 \qquad 9 = 4 \cdot 2 + 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 \Rightarrow 1 = 9 - 4 \cdot (11 - 9) \Rightarrow 1 = 5 \cdot 9 - 4 \cdot 11 \Rightarrow 1 = 5 \cdot 31 - 14 \cdot 11.$$

However, it is suitable to express the multiplicative inverse as a number between 0 and the modulus -1, therefore we add and subtract $31 \cdot 11$, yielding

$$1 = 5 \cdot 31 - 14 \cdot 11 \Rightarrow 1 = 5 \cdot 31 - 31 \cdot 11 + 31 \cdot 11 - 14 \cdot 11 \Rightarrow$$

$$1 = -6 \cdot 31 + 17 \cdot 11$$

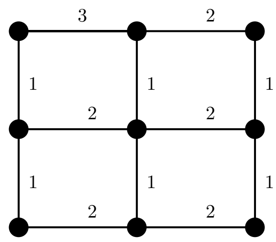
so that the multiplicative inverse of 11 modulo 31 is **17**. ($11 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{31}$.)

This is now used to obtain

$$11x \equiv 5 \pmod{31} \Leftrightarrow 17 \cdot 11x \equiv 17 \cdot t5 \pmod{31} \Leftrightarrow x \equiv 85 \pmod{31}$$

and 85 is then reduced modulo 31 to 23 so that the final answer is $x \equiv 23 \pmod{31}$.

6. *(a)* Consider the weighted graph to the right. Give *all* minimal spanning trees of this graph **(2p)** (no motivations required) and *(b)* compute their weight **(1p)**.
(a) Betrakta den viktade grafen till höger. Ange *alla* minsta uppspännande träd till grafen **(2p)** (inga motiveringar behövs) och *(b)* ange deras vikt **(1p)**



Solution: There are six different spanning trees, all of them contain all of the edges with weight 1 and then the edges with weight 2 are also included. The minimal spanning trees arise from choosing either on of the two edges with weight 2 on the right and one of the 3 edges with weight 2 on the left. This is total gives, as mentioned, six trees. All of them have the minimal weight of 10.

7. Consider the set of the first 10000 positive integers, $E = \{1, 2, 3, \dots, 10000\}$. (Låt E vara mängden av de första 10000 positiva heltalen.) Compute the probability that an arbitrary integer chosen from E is divisible by 2 or 5, but *not* by 3. (Beräkna sannolikheten att ett slumpvis valt tal från E är delbart med 2 eller 5, men *inte* med 3.)

Solution: The probability that a number is chosen that is divisible by 2 or 5, but not by 3 is

$$p\frac{|(A \cup B) \cap C|}{10000},$$

where the subsets A, B, C of E are defined as follows:
$A = \{x \in E; 2 \mid x\}$
$B = \{x \in E; 5 \mid x\}$
$C = \{x \in E; 3 \nmid x\}$.
Using set algebra we rewrite the numerator of the fraction defining p as

$$|(A \cup B) \cap C| = |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

where we have also applied the principle of inclusion and exclusion. The values of the three terms $|A \cap C|$, $|B \cap C|$, and $|A \cap B \cap C|$ can now be computed separately.

The set $A \cap C$ consists of all even numbers in E with all the numbers divisible by 3 removed. If we begin by enumerating all the numbers in A we get

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots, 9996, 9998, 10000$$

they can also be written

$$2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6, 2 \cdot 7, 2 \cdot 8, 2 \cdot 9, \dots, 2 \cdot 4998, 2 \cdot 4999, 2 \cdot 5000$$

and we can see that there are 5000 such numbers. From these we must remove all numbers divisible by 3. That will be every third number which will be

$$2 \cdot 3, 2 \cdot 6, 2 \cdot 9, \dots, 2 \cdot 4998.$$

Rewriting them with multiples of 3 factored out will help us see how many they are, then they can be written

$$2 \cdot 3 \cdot 1, 2 \cdot 3 \cdot 2, 2 \cdot 3 \cdot 3, \dots, 2 \cdot 3 \cdot 1666$$

that is there are 1666 such numbers. In conclusion we get

$$|A \cap C| = 5000 - 1666 = 3334.$$

Applying the same procedure to the set $B \cap C$ we obtain

$$B \cap C = \{5\cdot 1, 5\cdot 2, \cancel{5\cdot 3}, 5\cdot 4, 5\cdot 5, \cancel{5\cdot 6}, \ldots, \cancel{5\cdot 1998}, 5\cdot 1999, 5\cdot 2000\}$$

and again factoring out multiples of 3 we are able to see just how many numbers were removed, the numbers removed were:

$$5\cdot 3\cdot 1, 5\cdot 3\cdot 2, \ldots, 5\cdot 3\cdot 666$$

so from the 2000 numbers in B we removed the 666 numbers divisible by 3 leaving us with $|B \cap C| = 2000 - 666 = 1334$.

Finally we study $A \cap B \cap C$ and this set is the set of numbers given by

$$10\cdot 1, 10\cdot 2, \cancel{10\cdot 3}, 10\cdot 4, 10\cdot 5, \cancel{10\cdot 6}, \ldots, \cancel{10\cdot 999}, 10\cdot 1000.$$

Totally similar to earlier reasoning, the number of numbers in this set becomes 1000 - 333 so that we finally arrive at $|A \cap B \cap C| = 667$. Putting it all together yields

$$p = \frac{3334 + 1334 - 667}{10000} = \frac{4001}{10000} = 0.4001$$

so that the probability of getting a number from E divisible by 2 or 5, but not 3 becomes 40.01%.

8. Let A, B, C be any sets and introduce the functions $f : A \to B$ and $g : B \to C$. We can then also form the composition, $h = g \bigcirc f : A \to C$. Consider the following two statements:
(a) If g is surjective and f is injective, then h is surjective.
(b) If both f and g are injective, then h is also injective.
These statements are either true or false. For each statement: if it is true, prove it, if it is false, provide an example of two functions f, g that satisfy the premises but for which the conclusion does not hold. **(1.5p)** each.

Solution: *(a)* the answer is NO because we can construct a non-surjective function h as a composition between two functions that are surjective and injective as specified in the problem, a very simple example is given by setting $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2\}$ and simply setting $g(x) = x$ and $f(x) = x$. Then $h = g \bigcirc f$ cannot be surjective since it simply is $h(x) = x$ and there is no $x \in A$ with $h(x) = 2$ since there is just one element in A. *(b)* the answer is YES, h will be injective since if $h(x_1) = h(x_2)$, this means that $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, but since g is injective, this means that $f(x_1) = f(x_2)$ and since f is also injective this again yields $x_1 = x_2$, in conclusion we have shown that $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, which precisely means that h is injective.

9. Fyll i detaljerna i nedanstående ofullständiga bevis så att det blir fullständigt. Fill in the details in the following incomplete proof so that it becomes complete.

Statement: For each integer $n \geq 3$, we have $\frac{(n+2)!}{2^{n-1}} \geq 3^n$.
Proof: Introduce the predicate $A(n) \Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{2^{n-1}} \geq 3^n$, now prove $\forall n \geq 3 : A(n)$ using mathematical induction over n. We also introduce the notation LHS_n and RHS_n for the left, and right hand sides of the inequality that constitutes the statement $A(n)$.

1. Check that $A(3)$ holds, that is check that $LHS_3 \geq RHS_3$:

$$LHS_3 = \frac{(3+2)!}{2^{3-1}} = \frac{120}{4} = 30$$

$$RHS_3 = 3^3 = 27$$

and as $30 \geq 27$, $A(3)$ holds.

2. Now assume that $A(p)$ holds for a particular integer $p \geq 3$ and prove that $A(p+1)$ follows, this will mean that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for all $p \geq 3$. Accordingly assume that $A(p)$ holds, then we have $LHS_p = \frac{(p+2)!}{2^{p-1}} \geq 3^p = RHS_p$. This is what we shall use to prove that $LHS_{p+1} \geq RHS_{p+1}$. So we study LHS_{p+1}:

$$LHS_{p+1} = \frac{(p+1+2)!}{2^{p+1-1}} = \frac{(p+3)!}{2^{p-1} \,.\, 2} = \frac{p+3}{2} \cdot \frac{(p+2)!}{2^{p-1}} \geq \frac{p+3}{2} \cdot 3^p$$

where we have used the induction hypothesis in the last step to estimate $\frac{(p+2)!}{2^{p-1}}$ downwards with 3^p. Further using that $p \geq 3$ we can estimate $\frac{p+3}{2}$ downward with $\frac{3+3}{2} = 3$ so that the whole estimate becomes

$$LHS_{p+1} \geq 3 \cdot 3^p = 3^{p+1}$$

but this precisely equal to RHS_{p+1} so that we have shown

$$LHS_p \geq RHS_p \Rightarrow LHS_{p+1} \geq RHS_{p+1},$$

that is $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ for all $p \geq 3$.

3. As $A(3)$ holds and the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ also holds for all $p \geq 3$, we conclude, with the support of the principle of mathematical induction, that $\forall n \geq 3 : A(n)$ which completes the proof.

10. In this problem we consider the formation of a set difference between two cross products. An erroneous formula is given and your task is to correct the formula **(1.5p)** and also give an alternative formula **(1.5p)**. The proof given is so bad that it needs to be totally disregarded and we will not bother with demanding a proof in this problem, you need only to provide the two formulas.
Correct formula, based on the first way of visualizing: For any four sets A, B, C, D we have the formula

$$A \times C - B \times D = (A - B) \times C \cup (A \cap B) \times (C - D)$$

The second formula, based on another decomposition of the set difference is:

$$A \times C - B \times D = A \times (C - D) \cup (A - B) \times (C \cap D)$$

11. Studera $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{11}\}$. Bilda delmängden $G \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ genom att sätta $G = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_{12}$ genom $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in G$. *(a)* Bevisa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}_{12}$ **(2p)** och *(b)* ange samtliga ekvivalensklasser **(1p)**. (*Anmärkning: G är en så kallad "undergrupp" till* $\mathbb{Z}_{12}$.)

Solution: Vi ska visa tre egenskaper hos relationen: reflexivitet, symmetri och transitivitet.

1. Reflexivitet: alla $x \in \mathbb{Z}_{12}$ ska uppfylla $x\mathcal{R}x$, gäller det? JA, ty $x - x = \overline{0} \in G$.
2. Symmetri: alla $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$ ska uppfylla $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, gäller det?, Javisst, vi har nämligen $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in G \Leftrightarrow x - y = \overline{0} \vee x - y = \overline{4} \vee x - y = \overline{8}$ och detta ger $y - x = \overline{0}$, $y - x = \overline{8}$ respektive $y - x = \overline{4}$ vilka också alla är i G vilket alltså säkerställer att $y\mathcal{R}x$ gäller i samtliga fall. Symmetri gäller alltså.
3. Transitivitet: vi ska visa implikationen $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$. Antag alltså att $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in G$ och $y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y - z \in G$. Det betyder alltså att $x - y = w_1$ och $y - z = w_2$ och att både w_1 och w_2 ligger i G. Men G har just den egenskapen att summan av två element i G återigen hamnar i G så $x - z = x - y + y - z = w_1 + w_2$ ligger i G, dvs $x - z$ är i G så att $x\mathcal{R}z$. Alltså gäller transitivitet.

Ekvivalensklasserna är G själv $= \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$, $\overline{1}+G = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{9}\}$, $\overline{2}+G = \{\overline{2}, \overline{6}, \overline{10}\}$, samt $\overline{3}+G = \{\overline{3}, \overline{7}, \overline{11}\}$. (Unionen av alla dessa ekvivalensklasser blir hela $\mathbb{Z}_{12}$ så som gäller för ekvivalensrelationer.)

12. Låt $G = (V, E)$ vara en godtycklig graf med $n \geq 3$ noder. Bevisa att om G har en eulerkrets som också är en hamiltoncykel så måste alla noder i G ha gradtal 2. Använd induktion över n. *(Ledningar: Eulerkrets = en krets som går igenom grafen och korsar alla kanter precis en gång. Hamiltoncykel = cykel som går igenom grafen och besöker alla noder precis en gång.)*

Solution: Sätt $A(n) =$"Om V är en graf med n noder som har en eulerkrets som också är en hamiltoncykel så har alla noder i V gradtal 2." Visa $\forall n \geq 2 : A(n)$ med matematisk induktion.

1. Visa att $A(3)$ stämmer så låt G vara en godtycklig graf med 3 noder som har en eulerkrets som också är en hamiltoncykel. Enligt definitionen av hamiltoncykel så ingår alla noder i den cykeln och eftersom detta även är en eulerkrets så ingå också alla kanter. Vi kan därmed skriva upp alla noder och kanter i grafen i ett svep som

$$ae_1be_2ce_3a$$

där alltså noderna är a, b, c och de mellanliggande kanterna (som är alla kanter i grafen) ingår. Det är helt klart att alla dessa noder har precis gradtal 2. Alltså gäller $A(3)$.

2. Nu ska vi visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för alla $p \geq 3$. Antag alltså att $A(p)$ gäller för ett godtyckligt heltal $p \geq 3$. För att visa att $A(p+1)$ stämmer låt nu G vara en godtycklig graf med $p + 1$ noder och som har en eulerkrets som också är en hamiltoncykel. Välj nu en godtycklig nod v i cykeln och beteckna de två anslutande kanterna med e' och e''. Beteckna även de två associerade noderna med u och w så att avsnittet i hamiltoncykeln totalt betecknas med

$$ue've''w.$$

Eftersom det är en hamiltoncykel så kan inte noden v förekomma ytterligare en gång, och eftersom det är en eulerkrets är alla kanter i grafen med, det betyder att inga andra kanter än e' och e'' ansluter till v, dvs v har gradtal 2. Om vi nu ersätter $e've''$ med en ny kant kallad e som går från u till w så har vi förstås en ny graf, men med p noder. Eulerkretsen (som också var en hamiltoncykel) måste förstås fortfarande vara en eulerkrets/hamiltoncykel men med en nod och en kant mindre, det betyder att vi alltså återfört grafen på en mindre graf, enligt induktionsantagandet har nämligen alla dessa noder gradtalet 2 eftersom det finns en eulerkrets som också är en hamiltoncykel och den ju har p noder. Det är också klart att u och w i grafen med $p+1$ noder har samma gradtal som noderna u och w i grafen med p noder, dvs 2. Sammafattningsvis gäller alltså $A(p+1)$ som en följd av $A(p)$, det vill säga implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är visad.

3. Eftersom $A(3)$ gäller och implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för alla $p \geq 3$ kan vi med stöd av induktionsaxiomet dra slutsatsen $\forall n \geq 3 : A(n)$ vilket skulle bevisas.

Lösningar hörande till septembertentan (2018). *Lösningar saknas*

Lösningar till kontrollskrivning 1 (2018).

1. Betrakta nedanstående slutledning
   1. $p \to q$
   2. $q \to (s \wedge t)$
   3. $s \to \neg t$

   $\therefore\ \neg p$

   Denna slutledning är antingen korrekt eller inte korrekt. Om den är korrekt visa hur slutsatsen följer av premisserna och ange då vilka grundläggande härledningsregler som används i varje steg (*Modus Ponens, etc.*). Om däremot slutledningen *inte* är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden till utsagorna p, q, s och t som uppfyller alla premisser men trots det inte uppfyller slutsatsen.

   Lösning: slutledningen är korrekt och följer av nedanstående argumentation (det finns förstås andra korrekta argumentkedjor också):
   4. $\neg s \vee \neg t$, omskrivning av 3.
   5. $\neg(s \wedge t)$, 4, DeMorgans lag.
   6. $\neg q$, 2, 5, Modus Tollens.
   7. $\neg p$, 1, 6, Modus Tollens.

2. Använd matematisk induktion för att visa att $5|9^n - 4^n$ för alla heltal $n \geq 1$.

   Lösning: vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow 5|9^n - 4^n$ och konstaterar att vi ska visa $\forall n \geq 1 : A(n)$. Vi kan också skriva $A(n)$ som $\exists q : 9^n - 4^n = 5 \cdot q$.

   Steg 1. Kontrollera att $A(1)$ är sann, dvs att $5|9^1 - 4^1$. Men detta är ekvivalent med $5|5$ vilket är sant. Alltså gäller $A(1)$.

   Steg 2. För alla $p \geq 1$ ska vi nu visa att $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller. Låt alltså $p \geq 1$ vara ett godtyckligt heltal och anta att $A(p) \Leftrightarrow \exists q : 9^p - 4^p = 5 \cdot q$ (detta är alltså induktionsantagandet). Med stöd av detta ska vi visa att $A(p+1) \Leftrightarrow \exists r : 9^{p+1} - 4^{p+1} = 5 \cdot r$. Vi har då

   $$9^{p+1} - 4^{p+1} = 9 \cdot 9^p - 4 \cdot 4^p = 5 \cdot 9^p + 4 \cdot 9^p - 4 \cdot 4^p = 5 \cdot 9^p + 4 \cdot (9^p - 4^p).$$

   Nu använder vi induktionsantagandet som säger att $9^p - 4^p = 5 \cdot q$ och dr̈för kan vi alltså skriva om detta enligt $5 \cdot 9^p + 4 \cdot (9^p - 4^p) = 5 \cdot 9^p + 4 \cdot 5 \cdot q$. Och sammantaget har vi alltså

   $$9^{p+1} - 4^{p+1} = 5 \cdot 9^p + 4 \cdot 5 \cdot q = 5 \cdot (9^p + 4q).$$

   Det som vi ovan kallar r blir alltså $9^p + 4q$ och vi har visat $A(p+1)$. Eftersom detta byggde på att $A(p)$ var sann så har vi alltså visat att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann för alla $p \geq 1$.

   Steg 3. $A(1)$ sann $\Rightarrow A(2)$ sann $\Rightarrow A(1)$ sann $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \forall n \geq 1 : A(n)$, tack vare steg 1 och 2 och principen för matematisk induktion.

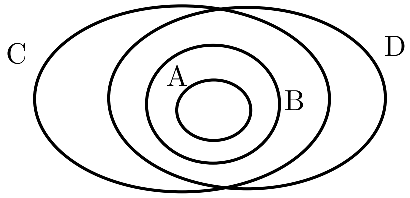
Lösningar till kontrollskrivning 2 (2018).

1. Antag att A, B, C och D är mängder som uppfyller följande premisser:

   1. $A \subseteq B$
   2. $B \subseteq C \cap D$
   3. $C \subseteq D^c$

   Visa att detta ger att $A = \emptyset$.

   Lösning 1 (med Venndiagram för max 1 poäng):
   Premisserna 1 och 2 kan symboliseras med ett Venndiagram av följande slag:

   Men om nu premiss 3 läggs till denna situation, alltså $C \subseteq D^c$, så innebär det att allt som finns i C måste ligga utanför D. Det innebär att $C \cap D$, den mängd där B är innesluten, är tom. Detta ger alltså att även B är tom och eftersom A i sin tur är innesluten i B så blir till sist även A tom. Vi har alltså visat $A = \emptyset$.

   Lösning 2 (fullständigt motsägelsebevis för max poäng):
   Antag att $A \neq \emptyset$. Då finns ett $x \in A$. Premiss 1 ger då att $x \in B$ och premiss 2 ger då att $x \in C \cap D$. Men detta ger också att $x \in C$ och $x \in D$. Så x är ett element som ligger i både C och D. Men eftersom $C \subseteq D^c$ (premiss 3) så följer även $x \in D^c$ så att vi har $x \in D$ och $x \in D^c$. Detta är en motsägelse eftersom D och D^c är disjunkta. Antagandet om att $A \neq \emptyset$ måste alltså vara falskt vilket innebär att $A = \emptyset$ vilket fullbordar beviset.

   Anmärkning: det här är egentligen precis samma uppgift som på förra kontrollskrivningen, men vi talar om mängder istället för utsagor. Delmängdsrelationen svarar mot implikationen, snitt mot konjunktion, komplement mot negation och utsagan $A = \emptyset$ mot utsagan $\neg p$ som också skulle visas följa av de tre premisserna på förra kontrollskrivningen.

2. Använd matematisk induktion för att visa att $2^n \cdot n! \geq 3^n$ för alla heltal $n \geq 3$.

   Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow 2^n \cdot n! \geq 3^n$. Vi kallar också vänster och höger led i denna olikhet för VL_n respektive HL_n. Och vi ska nu med matematisk induktion visa $\forall n \geq 3 : A(n)$.

   Steg 1. Kontrollera att $A(3)$ är sann, dvs att $VL_3 \geq HL_3$. Vi har $VL_3 = 2^3 \cdot 3! = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ respektive $HL_3 = 3^3 = 27$. Eftersom $48 \geq 27$ så gäller tydligen $VL_3 \geq HL_3$, dvs $A(3)$ är sann.

   Steg 2. Induktionssteget. Det gäller nu att visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann för alla $p \geq 3$. För extra tydlighet delar vi upp detta steg i tre delsteg: (a) antagandet, (b) bearbetningen och till sist (c) slutsatsen.

   (a) antagandet - gör det så kallade *induktionsantagandet* och antag att $A(p)$ är sant för ett visst $p \geq 3$. Då har vi alltså $A(p) \Leftrightarrow VL_p \geq HL_p \Leftrightarrow 2^p \cdot p! \geq 3^p$.

   (b) bearbetningen - med stöd av induktionsantagandet, $A(p)$, visa att även $A(p+1)$ blir sann. För att se detta ska vi alltså visa att $VL_{p+1} \geq HL_{p+1}$. Vi studerar därför VL_{p+1}:

   $$VL_{p+1} = 2^{p+1} \cdot (p+1)! = 2 \cdot 2^p \cdot (p+1) \cdot p! = 2(p+1) \cdot 2^p p!.$$

   Här kan vi använda kraften i induktionsantagandet och skatta $2^p p!$ nedåt med 3^p. Det ger alltså att $VL_{p+1} \geq 2(p+1)3^p$. Eftersom vidare $p \geq 3$ så kan $2(p+1)$ skattas nedåt med $2 \cdot 4 = 8$.

Detta ger totalt olikheten $VL_{p+1} \geq 8 \cdot 3^p \geq 3 \cdot 3^p = 3^{p+1} = HL_{p+1}$, det vill säga vi har funnit att $VL_{p+1} \geq HL_{p+1}$ gäller som följd av $VL_p \geq HL_p$.

(c) slutsatsen blir då att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för alla $p \geq 3$.

Steg 3. med hänvisning till steg 1 och steg 2 och induktionsaxiomet kan vi nu dra slutsatsen att $\forall n \geq 3 : A(n)$ vilket fullbordar beviset.

Lösningar hörande till material daterat 2019

Lösningar till januaritentamen (2019).

PART A. Tick the correct boxes: Below are 4 propositions, each is either **true** or **false**. If you tick the correct box, you will get +1 point. If you tick the wrong box, you will get −1 point. You can also **pass** on a question, that gives 0 points. (You cannot get a negative subtotal on part A.)

1. The sum of two prime numbers greater than 2 is always even.
(Summan av två primtal större än 2 är alltid ett jämnt tal.)
true since two primes greater than 2 are always odd and the sum of two odd numbers is always even.

2. For all sets, A, B, C, we always have $A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \cup B^c) \cap C = C - B$.
(För alla mängder A, B, C gäller den givna implikationen.)
true since $(A \cup B^c) \cap C = (A \cap C) \cup (B^c \cap C) = \emptyset \cup (C \cap B^c) = \emptyset \cup (C - B) = C - B$.

3. Let a, b, x be positive integers and set $lcm(a, b) = ab/gcd(a, b)$. Then we have $lcm(ax, bx) = x^2 lcm(a, b)$.
(Låt a, b, x vara positiva heltal och sätt $lcm(a, b) = ab/gcd(a, b)$. Då gäller $lcm(ax, bx) = x^2 lcm(a, b)$.)
false since $lcm(ax, bx) = axbx/gcd(ax, bx) = x^2 \cdot ab/(x \cdot gcd(a, b)) = x^2/x \cdot ab/gcd(a, b) = x \cdot lcm(a, b)$.

4. From $(p \to q) \wedge (q \to \neg p)$ we can conclude $\neg p \wedge \neg q$.
(Från $(p \to q) \wedge (q \to \neg p)$ kan vi dra slutsatsen $\neg p \wedge \neg q$.)
false since $\neg p \wedge q$ also satisfies the premises.

PART B. 8 problems each worth 3 points. Give complete and correct solutions, write legibly. Normally full motivations required (***no*** points for answers only). Some Swedish translations are given.

5. Solve the recurrence relation $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ if $a_0 = 1$ and $a_1 = 6$. (Lös differensekvationen.)

Solution: The characteristic equation is $x^2 = 6x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, which is a double root. Hence the recurrence relation has the general solution $a_n = (An + B) \cdot 3^n$, where A, B are constants. We determine the values of A and B by using $a_0 = 1$ and $a_1 = 6$. This gives the two equations $(A \cdot 0 + B) \cdot 3^0 = 1$ and $(A \cdot 1 + B) \cdot 3^1 = 6$ which can be written $B = 1$ and $A + B = 2$ which gives $A = B = 1$ so that the solution of the recurrence relation is $a_n = (n+1) \cdot 3^n$.

6. Use the Euclidean Algorithm to find the multiplicative inverse of 11 modulo 29 and use it to find all integers x that satisfy the congruence

$$11x \equiv 17 \pmod{29}.$$

Använd Euklides Algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 11 modulo 29 och använd den för att finna alla heltal x som löser ovanstående kongruens.

Solution: Euklides algoritm ger

$$29 = 2 \cdot 11 + 7, \quad 11 = 1 \cdot 7 + 4, \quad 7 = 1 \cdot 4 + 3, \quad 4 = 1 \cdot 3 + 1$$

som vidare ger

$$1 = 4 - 1 \cdot 3 = 4 - 1 \cdot (7 - 1 \cdot 4) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7 = 2 \cdot (11 - 1 \cdot 7) - 1 \cdot 7 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7$$

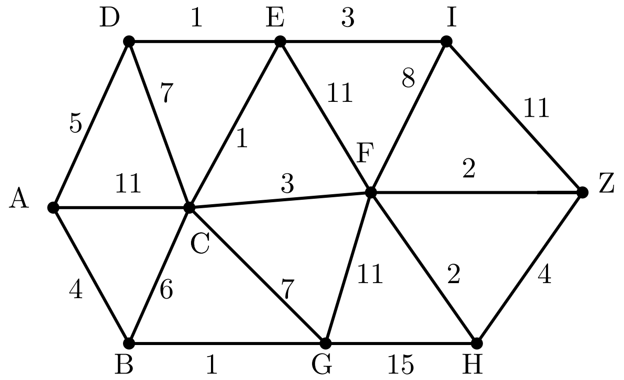
som ger $1 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot (29 - 2 \cdot 11) = 8 \cdot 11 - 3 \cdot 29$, det vill säga multiplikativa inversen till 11 modulo 29 är 8.

Multiplikation med den multiplikativa inversen i $11x \equiv 17 \pmod{29}$ ger den ekvivalenta kongruensen $8 \cdot 11x \equiv 8 \cdot 17 \pmod{29} \Leftrightarrow x \equiv 4 \cdot 2 \cdot 17 \pmod{29}$ och eftersom $2 \cdot 17 = 34 \equiv 5 \pmod{29}$ är detta ekvivalent med

$$x \equiv 4 \cdot 5 \equiv 20 \pmod{29}.$$

(Svaret är alltså "alla tal kongruenta med 20 modulo 29".)

7. Consider the weighted graph below.
(a) Use Dijkstra's algorithm to find the shortest path between the nodes A and Z. Present each substep (with all candidate labels) in the process of finding all the labels, and of course present all the labels and the shortest path itself, with its total cost, from A to Z **(2p)**.
(b) Give a minimal spanning tree of the graph with its total cost. (You do not need to present details of the solution, just give the tree and its total cost/weight without motivation.) **(1p)**



Solution: We introduce the starting label $A(-,0)$ (for A) and present 7 steps in which all candidate labels are presented. The labels that are chosen among the candidates are presented in bold style. In the second and final steps, two labels were introduced at once.
Step 1. **B(A,4)**, C(A,11), D(A,5).
Step 2. **G(B,5)**, C(B,10), **D(A,5)**.
Step 3. H(G,19), F(G,16), C(B,10), **E(D,6)**.
Step 4. **C(E,7)**, F(G,16), I(E,9), H(G,19).
Step 5. F(C,10), **I(E,9)**, H(G,19).
Step 6. **F(C,10)**, Z(I,20), H(G,19).
Step 7. **Z(F,12)**, **H(F,12)**.

A minimal spanning tree of this graph consists of the edges AD, AB, BG, DE, EC, CF, EI, FZ, FH and it has the total weight/cost of 22.

8. Statement: For all integers $n \geq 2$ we have $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$

Proof: (Induction over n.) Introduce the predicate $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$. We also introduce the notation LHS_n for the expression $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1}$ and RHS_n for the expression $\frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$. The we can easily write $A(n)$ as $LHS_n = RHS_n$.

Step 1. Check that A(2) is true, that is check that $LHS_2 = RHS_2$. Now $LHS_2 = \sum_{k=2}^{2} \frac{2}{k^2-1} = \frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3}$ and $RHS_2 = \frac{3}{2} - \frac{2 \cdot 2+1}{2 \cdot (2+1)} = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{9}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ which shows that $LHS_2 = RHS_2$ so that $A(2)$ is true.

Step 2. Now, for an arbitrary $p \geq 2$ show that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true. To show this, first assume that $A(p)$ holds, that is we assume that

$$LHS_p = \sum_{k=2}^{p} \frac{2}{k^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2p+1}{p(p+1)} = RHS_p.$$

This is what we call the induction hypothesis and it is now our goal to show that this implies that $A(p+1)$ is true, that is, we wish to show that leads to

$$LHS_{p+1} = \sum_{k=2}^{p+1} \frac{2}{k^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2(p+1)+1}{(p+1)((p+1)+1)} = RHS_{p+1}.$$

To succeed in doing this we work with the expression for LHS_{p+1}. It is

$$LHS_{p+1} = \sum_{k=2}^{p+1} \frac{2}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{p} \frac{2}{k^2-1} + \frac{2}{(p+1)^2-1} = LHS_p + \frac{2}{(p+1)^2-1}.$$

And here is where we use the force of the induction hypothesis, we replace LHS_p with RHS_p so that we get

$$LHS_{p+1} = LHS_p + \frac{2}{(p+1)^2-1} = RHS_p + \frac{2}{(p+1)^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2p+1}{p(p+1)} + \frac{2}{(p+1)^2-1}.$$

It is this last expression that we need to show equals RHS_{p+1}. To accomplish this we study these expressions in detail:

$$LHS_{p+1} = \frac{3}{2} - \frac{2p+1}{p(p+1)} + \frac{2}{(p+1)^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2p+1}{p(p+1)} + \frac{2}{p^2+2p} = \frac{3}{2} - \frac{2p+1}{p(p+1)} + \frac{2}{p(p+2)}.$$

Putting the last two fractions on the common denominator $p(p+1)(p+2)$ yields

$$\begin{aligned} LHS_{p+1} &= \frac{3}{2} - \frac{(2p+1)(p+2)}{p(p+1)(p+2)} + \frac{2(p+1)}{p(p+1)(p+2)} = \frac{3}{2} + \frac{2(p+1)-(2p+1)(p+2)}{p(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{2p+2-2p^2-4p-p-2}{p(p+1)(p+2)} = \frac{3}{2} + \frac{-2p^2-3p}{p(p+1)(p+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2p+3}{(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

and the final expression equals $RHS_{p+1} = \frac{3}{2} - \frac{2(p+1)+1}{(p+1)((p+1)+1)}$ which means that $LHS_{p+1} = RHS_{p+1}$ and that this follows as a result of $LHS_p = RHS_p$. That is we have in total shown that $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ which concludes the second step of the proof.

Step 3. We have shown $A(2)$. By step 2, this implies $A(3)$, which in turn, again by step 2, implies $A(4)$ and so on. In conclusion, by step 1 and 2 and the principle of mathematical induction we have $\forall n \geq 2 : A(n)$ which concludes the proof.

9. The following proposition is erroneous and the proof is also erroneous. Find all the errors and correct them. (**1p** for correcting the proposition and **2p** for correcting the proof.) (Följande påstående är felaktigt och beviset är också felaktigt. Finn alla fel och rätta dem. (**1p** för att rätta påståendet och **2p** för att rätta beviset.))

Proposition: For all statements p, q, r we have $\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$.
Proof: $\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \neg(p \wedge (\neg q \wedge \neg(\neg r))) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$.

Solution: Det rättade påståendet lyder

$$\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge \neg r).$$

Vi visar detta genom att använda DeMorgans lag som ger

$$\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg(\neg(q \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge \neg r).$$

10. Denote by $\mathbb{N}$ the set of all positive integers, $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Consider the relation $\mathcal{R}$ defined on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ by:

$$(x, y)\mathcal{R}(z, w) \Leftrightarrow x - y = z - w$$

Prove that $\mathcal{R}$ is an equivalence relation **(1p)**. Describe **all** of the equivalence classes and draw a figure that illustrates them **(2p)**.

Solution: We need to show that $\mathcal{R}$ is reflexive, symmetric and transitive.
Reflexivity: Show that for all $(x, y) \in \mathbb{N}$ we have $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$. But this is clearly so because $x - y = x - y \Leftrightarrow (x, y)\mathcal{R}(x, y)$. Reflexivity is shown.
Symmetry: We now need to show that $(x, y)\mathcal{R}(z, w) \Rightarrow (z, w)\mathcal{R}(x, y)$ so assume that $(x, y)\mathcal{R}(z, w)$. This means that $x - y = z - w$. But this then means that $z - w = x - y$ which in fact means that $(z, w)\mathcal{R}(x, y)$. Symmetry is shown.
To show transitivity we must show that $(x, y)\mathcal{R}(z, w)$ and $(z, w)\mathcal{R}(u, v)$ implies that $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$. Accordingly suppose that $(x, y)\mathcal{R}(z, w)$ and $(z, w)\mathcal{R}(u, v)$ hold. This then means that $x-y = z-w$ and $z - w = u - v$. Again this implies that $x - y = u - v$ which in fact means that $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$ which completes the proof that $\mathcal{R}$ is transitive.

In conclusion: since $\mathcal{R}$ has all three required properties, we conclude that $\mathcal{R}$ indeed is an equivalence relation.

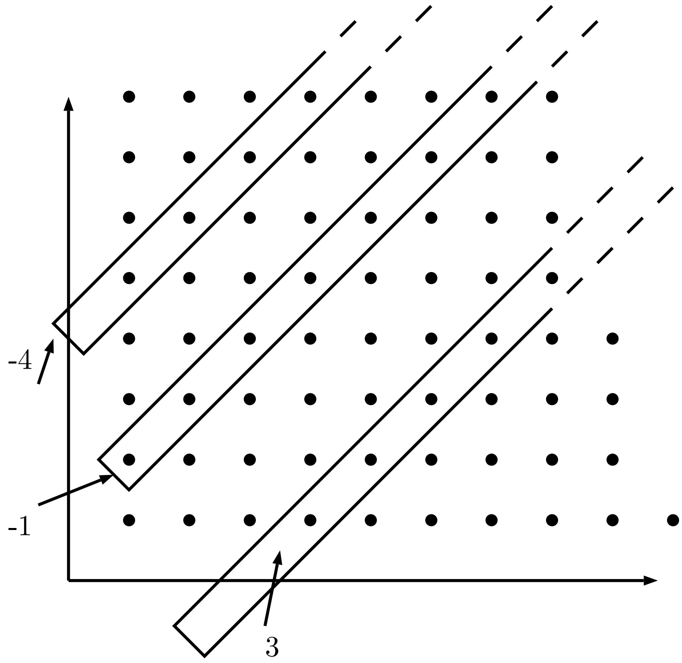
We will now study the equivalence classes which will create a partition of the set $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Fix a point $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ and consider the equivalence class that it is a member of. This class can be written

$$\overline{(a,b)} = \{(x, y); (x, y)\mathcal{R}(a, b)\} = \{(x, y); x - y = a - b\}$$

since (a, b) is fixed, this set consists of all points (x, y) whose difference $(x - y)$ is equal to this fixed integer. Also note that $a - b$ can be any integer and we can call this integer m, this means that the equivalence class consists of all those points that satisfy

$$x - y = m \Leftrightarrow y = x - m$$

and this is the equation of a straight line, and since we are restricted to points (x, y) where x, y are positive integers, we are looking at points with integer coordinates in the first quadrant. And one equivalence class consists of all points on a straight line with slope = 1.



In the diagram above we are illustrating three equivalence classes described as three lines of points with positive integer coordinates, the lowest of these consists of all points where the difference between the coordinates are all equal to 3. And then we have two other classes, corresponding to the differences -1 and -4 respectively. It is clear that all points with positive integer coordinates (that is $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) gets partitioned into lines like this and those lines are the equivalence classes.

11. Prove that if $p > 1$ is a natural number with $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$, then p must be a prime number.

Solution: Vi ska alltså visa implikationen

$$(p - 1)! \equiv -1 \,(\text{mod } p) \Rightarrow p \text{ primtal.}$$

För att visa detta antar vi att $(p - 1)! \equiv -1\,(\text{mod } p)$, men trots det är inte p ett primtal. Att p inte är ett primtal innebär att det finns två heltal, $a > 1$ och $b > 1$ sådana att $p = a \cdot b$. Men då ligger talet a i intervallet 2 till och med $p - 1$ och då får vi:

$$(p - 1)! = (p - 1) \cdots (a + 1) \cdot a \cdot (a - 1) \cdots 1$$

det kan hända att $a + 1 = p - 1$ eller $a - 1 = 1$, det är gränsfallen, men poängen är att det finns ett a någonstans mellan 2 och $p - 1$. SAmma sak gäller för b men vi behöver bara detta för a. Ok, då ligger a i det här intervallet och $p = a \cdot b$. Men om vi nu sätter in detta i $(p - 1)! \equiv -1(\text{mod } p)$, då får vi

$$(p - 1)! = (p - 1) \cdots (a + 1) \cdot a \cdot (a - 1) \cdots 1 \equiv -1 \,(\text{mod } p)$$

och om vi skriver om kongruensen som en ekvation så får vi

$$(p - 1)! = (p - 1) \cdots (a + 1) \cdot a \cdot (a - 1) \cdots 1 = -1 + k \cdot p = -1 + k \cdot a \cdot b$$

för något k (vi vet inte vad k är men att kongruensen stämmer innebär att vi vet att det finns ett k som uppfyller likheten).

Detta är nu en motsägelse för detta kan skrivas om som att

$$1 = k \cdot a \cdot b - (p-1) \cdots (a+1) \cdot a \cdot (a-1) \cdots 1 = a \cdot (k \cdot b - (p-1) \cdots (a+1) \cdot (a-1) \cdots 1) = a \cdot q$$

för något heltal q och ser vi alltså att $1 = a \cdot q$, dvs $a|1$, där $a > 1$ vilket är en motsägelse. Det betyder att vårt antagande ovan om att p kan uppfylla $(p-1)! \equiv -1 (\text{mod } p)$ utan att vara ett primtal måste vara felaktigt, alltså måste detta innebära att $(p-1)! \equiv -1 (\text{mod } p)$ implicerar att p är ett primtal vilket fullbordar beviset.

12. Låt a, b, c vara tre heltal utan gemensamma delare (dvs antag att $\gcd(a, b) = \gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$). Visa att det finns heltal x, y sådana att $a + bx + cy = 1$.

Solution: Eftersom b, c är relativs prima så finns heltal s, t så att $sb+tc = 1$. Ansätt nu $x = -(a-1)s$ och $y = -(a-1)t$. Detta ger då $a + bx + cy = a + xb + yc$

$$= a + -(a-1)sb + -(a-1)tc = a - (a-1)(sb + tc) = a - (a-1) \cdot 1 = a - a + 1 = 1.$$

Lösningar till apriltentan (2019).

DEL A.

1. Låt p, q, r vara godtyckliga utsagor. Då är utsagan $(p \to q) \vee (r \to p)$ alltid sann.

Svar: Ja, den är alltid sann eftersom vi kan skriva

$$(p \to q) \vee (r \to p) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee p) \Leftrightarrow p \vee \neg p \vee q \vee \neg r$$

och $p \vee \neg p$ är alltid sann så $p \vee \neg p \vee q \vee \neg r$ blir alltid sann.

2. För godtyckliga mängder A, B gäller $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (B - A)^c \cup (A - B)^c$.

Svar: Nej, detta gäller inte för $(B-A)^c \cup (A-B)^c = (B \cap A^c)^c \cup (A \cap B^c)^c = (B^c \cup A) \cup (A^c \cup B) = U$ där U stå för hela universum som mängderna A och B betraktas i. Däremot gäller formeln om $\cup$ byts mot $\cap$ i högerledet.

3. Låt a, b, c vara positiva heltal och antag att $a|bc \wedge c|ab \wedge b|ac$. Då gäller $a = b = c$.

Svar: Nej detta gäller inte, till exempel kan vi sätta $a = 4$, $b = 6$ och $c = 6$ och ha $a|bc \wedge c|ab \wedge b|ac$ men så klart inte $a = b = c$.

4. För varje positivt heltal N, beteckna med $\alpha_{N,1}, \alpha_{N,2}, \alpha_{N,3}$, exponenterna i den entydigt bestämda standardiserade primtalsfaktoriseringen av N. ($N = 2^{\alpha_{N,1}} \cdot 3^{\alpha_{N,2}} \cdot 5^{\alpha_{N,3}} \cdots$.) Då gäller att om $N \geq M$, så måste vi också ha $\alpha_{N,i} \geq \alpha_{M,i}$ för alla i.

Svar: Nej detta gäller inte, till exempel kan vi sätta $N = 3$ och $M = 2$ då gäller $\alpha_{N,1} = 0$ och $\alpha_{M,1} = 1$ och $N \geq M$ men $\alpha_{N,1} = 0 < \alpha_{M,1} = 1$.

DEL B.

5. Lös differensekvationen $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ med $a_0 = 3$ och $a_1 = 5$.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $x^2 = 2x + 3$ som har lösningarna $x = -1$ och $x = 3$ det vill säga den allmänna lösningen till differensekvationen kan skrivas $a_n = C \cdot (-1)^n + d \cdot 3^n$, där C, D är konstanter som bestäms av $a_0 = 3$ respektive $a_1 = 5$. Detta ger ett ekvationssystem genom

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \cdot (-1)^0 + D \cdot 3^0 = 3 \\ C \cdot (-1)^1 + D \cdot 3^1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C + D = 3 \\ -C + 3D = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C + D = 3 \\ 4D = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

så att $a_n = (-1)^n + 2 \cdot 3^n$.

6. Använd Euklides Algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 35 modulo 67 och använd den för att finna alla heltal x som uppfyller

$$35x \equiv 18 \text{ (mod 67)}.$$

Lösning: Vi utför upprepade divisioner och får $67 = 1 \cdot 35 + 32$, $35 = 1 \cdot 32 + 3$, $32 = 10 \cdot 3 + 2$, $3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - (32 - 10 \cdot 3) = 11 \cdot 3 - 32 = 11 \cdot (35 - 1 \cdot 32) - 32 = 11 \cdot 35 - 12 \cdot 32$. I det här läget kan det vara bra att ta en paus och kontrollera att verkligen $11 \cdot 35 - 12 \cdot 32 = 1$ och en snabb uträkning vid sidan om (som inte redovisas här) ger att det stämmer. Vi fortsätter och får

$$11 \cdot 35 - 12 \cdot 32 = 11 \cdot 35 - 12 \cdot (67 - 1 \cdot 35) = 23 \cdot 35 - 12 \cdot 67$$

så multiplikativa inversen till $35 \pmod{67}$ är 23. Detta ger att

$$35x \equiv 18 \pmod{67} \Leftrightarrow 23 \cdot 35 \cdot x \equiv 23 \cdot 1 \pmod{67} \Leftrightarrow x \equiv 23 \cdot 3 \cdot 6 \pmod{67} \Leftrightarrow x \equiv 2 \cdot 6 = 12 \pmod{67}$$

7. Beteckna med Ω mängden av alla positiva heltal mindre än eller lika med 10000. Beräkna sannolikheten att ett slumpvis valt tal ur Ω är delbart med 15 eller 35.

Lösning: Sätt $A = \{x \in \Omega; 15|x\} = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, \dots, 15 \cdot 666\}$. Då gäller $|A| = 666$. (Vi hittar 666 som kvoten i heltalsdivisionen 10000/15.) Sätt $B = \{x \in \Omega; 35|x\} = \{35 \cdot 1, 35 \cdot 2, \dots, 35 \cdot 285\}$ Då gäller $|B| = 285$ och 285 (=kvoten i heltalsdivisionen 10000/35). Nu gäller

$A \cap B = \{x \in \Omega; 15|x \wedge 35|x\} = \{x \in \Omega; 105|x\} = \{105 \cdot 1, 105 \cdot 2, \dots, 105 \cdot 95\} \Rightarrow |A \cap B| = 95$,

där primtalsfaktorisering ger oss att $15|x \wedge 35|x \Leftrightarrow 3 \cdot 5|x \wedge 5 \cdot 7|x \Leftrightarrow 3 \cdot 5 \cdot 7|x \Leftrightarrow 105|x$. (Hade 15 och 35 varit relativt prima så hade vi haft $15|x \wedge 35|x \Leftrightarrow 15 \cdot 35|x$.)

Sammantaget gäller att sannolikheten vi söker kan tecknas med hjälp av principen för inklusion och exklusion:

$$p = \frac{|A \cup B|}{10000} = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{10000} = \frac{666 + 285 - 95}{10000} = \frac{856}{10000} = 8.56\%.$$

8. Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.

Påstående: Låt $f_0, f_1, f_2, \dots$ beteckna *Fibonaccis talföljd* det vill säga $f_0 = 0, f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \geq 0$. För alla positiva heltal n gäller då:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Bevis: Induktion över n. Introducera predikatet

$$A(n) \Leftrightarrow VL_n = HL_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Vi ska visa att $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Steg 1. Kontrollera att $A(1)$ gäller, det vill säga att

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} f_{1+1} & f_1 \\ f_1 & f_{1-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

är lika. Men de är klart lika eftersom definitionen av Fibonaccitalen ger $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ och $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$. Alltså gäller $A(1)$.

Steg 2. För ett godtyckligt $p \geq 1$ visa nu att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann. För att visa detta antag först att

$$A(p) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} f_{p+1} & f_p \\ f_p & f_{p-1} \end{bmatrix}$$

Med stöd av detta ska vi nu visa att $A(p+1)$ är sann, det vill säga att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ där

$$VL_{p+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{p+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^p \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad HL_{p+1} = \begin{bmatrix} f_{p+2} & f_{p+1} \\ f_{p+1} & f_p \end{bmatrix}$$

Men enligt induktionsantagandet kan vi ersätta $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^p$ med $\begin{bmatrix} f_{p+1} & f_p \\ f_p & f_{p-1} \end{bmatrix}$ och detta ger oss

$$VL_{p+1} = \begin{bmatrix} f_{p+1} & f_p \\ f_p & f_{p-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{p+1} + f_p & f_{p+1} \\ f_p + f_{p-1} & f_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{p+2} & f_{p+1} \\ f_{p+1} & f_p \end{bmatrix}$$

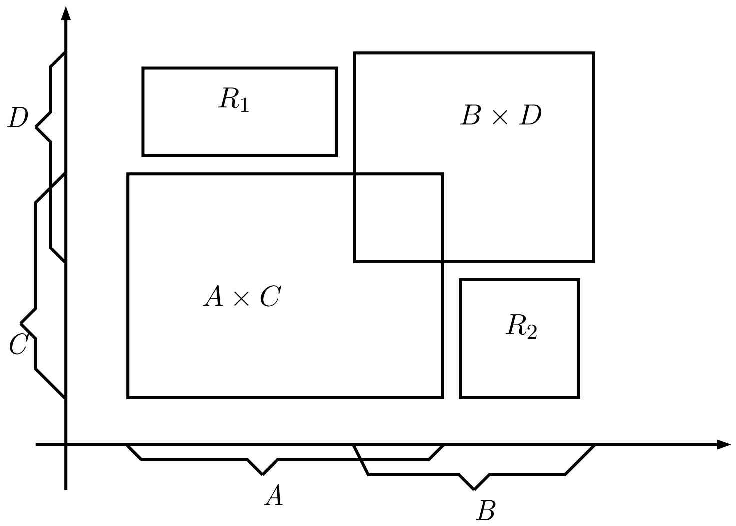
där vi i sista ledet återigen använt definitionen av Fibonaccitalen. Men detta är precis HL_{p+1} och alltså gäller $VL_{p+1} = HL_{p+1} \Leftrightarrow A(p+1)$ och eftersom detta följde av antagandet $A(p+1)$ har vi visat implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ vilket fullbordar induktionssteget.

Steg 3. Steg 1 och 2 och induktionsaxiomet ger att $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ vilket fullbordar beviset.

9. Låt A, B, C, D vara godtyckliga mängder. Med formeln

$$(A \times C) \cup (B \times D) = ((A \cup B) \times (C \cup D) - (A \times D)) - (B \times C)$$

vill vi ge ett uttryck för unionen mellan kryssprodukterna i vänsterledet. Men formeln är felaktig. Ange ett nytt högerled så att formeln stämmer.
Om vi låtsas som att mängderna A, B, C, D är delintervall av de reella talen $\mathbb{R}$ så kan mängden $(A \times C) \cup (B \times D)$ åskådliggöras som en kryssprodukt av dessa intervall. Om vi ritar ut dem längs koordinataxlarna i $\mathbb{R}^2$ så får $(A \times C) \cup (B \times D)$ följande bildmässiga representation:



Här är två rektanglar R_1 och R_2 inritade, de ansluter inte riktigt till sina kanter men det är för att annars skulle rektanglarnas gränser inte synas. Det är meningen att $R_1 = (A - B) \times (D - C)$ respektive $R_2 = (B - A) \times (C - D)$. Och här finner vi också rättelsen av formeln, den ska lyda

$$(A \times C) \cup (B \times D) = ((A \cup B) \times (C \cup D) - R_1) - R_2 =$$

$$((A \cup B) \times (C \cup D) - (A - B) \times (D - C)) - (B - A) \times (C - D)$$

10. För alla positiva heltal n definierar vi $\phi(n)$ som antalet positiva heltal mindre än n som är relativt prima till n, det vill säga antalet tal i mängden $\{x \in \mathbb{N}; x \leq n \wedge \gcd(x, n) = 1\}$. Du får gratis informationen att om a, b är två relativt prima tal så gäller $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$. Utgående från denna information, formulera och bevisa en formel för $\phi(n)$ för ett godtyckligt n.

Lösning: Välj en godtycklig potens av ett primtal, p^k. De tal i mängden $\{1, 2, 3, \ldots, p^k - 1, p^k\}$ som är relativt prima till p^k måste vara alla tal som inte är delbara med primtalet p själv, det vill säga alla tal i $\{1, 2, 3, \ldots, p^k - 1, p^k\}$ utom just multiplarna av p, det vill säga

$$p \cdot 1, p \cdot 2, \ldots, p \cdot (p^k - 1), p \cdot p^{k-1}.$$

och de är p^{k-1} stycken. Antalet tal som är efterfrågat blir alltså $p^k - p^{k-1}$. Vi har nu räknat ut vad $\phi(p^k)$ är (p primtal).

Om nu n är ett godtyckligt heltal med standardmässig primtalsfaktorisering

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

så kan vi med den givna informationen skriva

$$\phi(n) = \phi(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}) = \phi(p_1^{k_1}) \cdot \phi(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot \phi(p_m^{k_m}) =$$

$$(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \cdot (p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \cdot \ldots \cdot (p_m^{k_m} - p_m^{k_m-1})$$

och det blir alltså den sökta formeln.

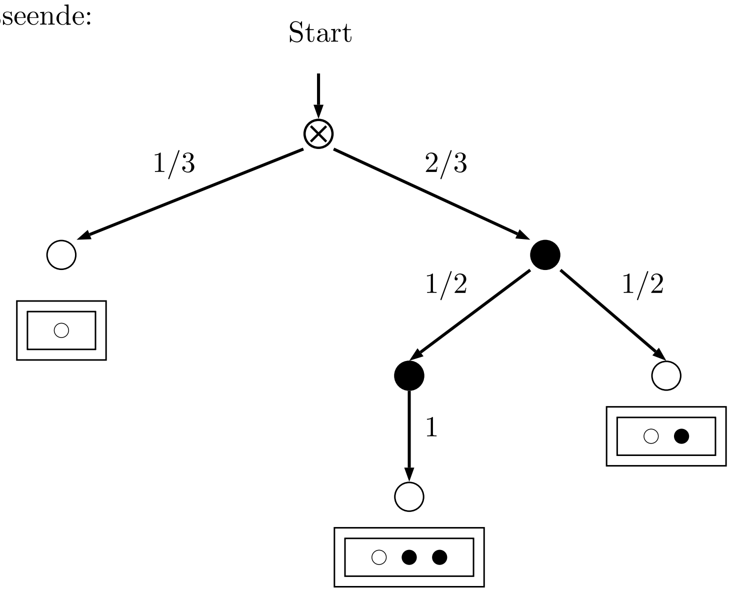
11. I en låda ligger 3 bollar: 2 svarta och 1 vit. Du kan ta bollar ur lådan men du kan inte veta vilken färg bollen har förrän du tagit ut den ur lådan. Vi spelar nu ett spel där du hela tiden tar bollar ur lådan utan lägga tillbaka dem och med följande regler:

1. Du får ta så många bollar du vill ur lådan, du får alltså avsluta spelet när som helst.
2. Om du tar den vita bollen vinner du 300 kronor.
3. Om du tar en svart boll förlorar du 200 kronor.

Vi betraktar det här spelet som en slumpprocess där du spelar för att maximera din vinst och utfallsrummet utgörs då av de olika slutresultat som kan uppkomma då du beslutar dig för att inte spela mer. Ett utfall/slutresultat är till exempel om du skulle bli sittande med alla bollarna vilket skulle innebära att du förlorar totalt 100 kronor (du vinner 300 för att du fick den vita, men förlorar 400 för att du också fick de två svarta.)

Ange utfallsrummet, alltså alla de möjliga utfallen med deras respektive sannolikheter **(2p)** (*Ledning: du kan åskådliggöra hela slumpprocessen i ett träd där roten till trädet är startläget i spelet*). För slumpspel av ovanstående typ kan vi införa vad som kallas *förväntad vinst* som då bildas som en summa över alla utfall (alltså en term för varje utfall) där varje term utgörs av sannolikheten för utfallet multiplicerad med vinsten för det aktuella utfallet. (Vinst kan modelleras med positiva tal och förlust med negativa tal.) Beräkna den förväntade vinsten för spelet ovan. Spelar du gärna spelet? **(1p)**.

Lösning: Vi använder ett binärt riktat träd för att illustrera alla möjliga utfall. Trädet har följande utseende:



Vi startar i roten som symboliseras med $\otimes$ och då har lådan alla bollar kvar det vill säga de två svarta och den vita. Om vi tar en boll på måfå då så är chansen att den är vit 1/3, därför är grenen som går ut mot hörnet som liknar en vit boll (åt vänster i grafen) annoterad med 1/3. Eftersom vi då slutar spela omedelbart är det här den sista bollen vi tar så det hörn som vi symboliserar med en vit boll är här då ett löv, det vill säga det finns inga ytterligare förgreningar och det hä representerar alltså ett utfall. Vi har då vunnit 300 kronor och vi symboliserar att vi spelat klart genom att rita en rektange under lövet som visar att vi fick som slutresultat en vit boll.

Om vi däremot, från startläget, drar en svart boll så är vi inte intresserade av att sluta spela, vi vill ha den vita bollen förstås! Det är 2/3 chans att dra en svart boll (eftersom det från början finns två svarta och en vit boll) så vi annoterar den här grenen av trädet med 2/3 och det hörn som grenen leder till symboliseras med en svart boll. Vi är som sagt inte intresserade av att sluta nu, men sannolikheterna för att dra en svar respektive en vit boll har ändrats, nu finns det ju precis en svart och en vit kvar så nästa gång vi drar en boll är sannolikheten för svart och vit precis lika och de är 1/2 i båda fallen så förgreningen här leder till två nya hörn där det ena symboliseras av en svart boll och det enda av en vit. Båda grenarna annoteras med sannolikheten 1/2.

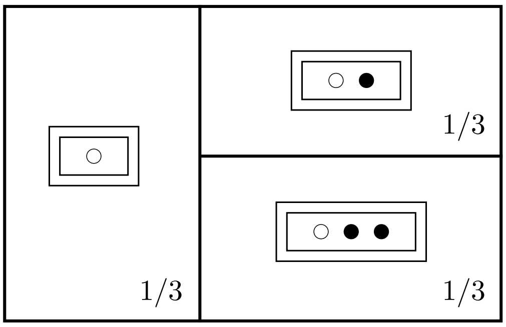
Om vi i det här läget får den vita bollen, det vill säga vi följer grenen neråt höger, så avslutar vi spelet eftersom vi vill vinna så mycket som möjligt. När vi en gång plockat den vita bollen så är det ingen idé att plocka mera. Det här hörnet i trädet är alltså också ett löv som symboliserar ett slutligt utfall av spelet. Vi ritar en rektangel under som visar slutresultatet: en vit och en svart boll. (Vinst 100 kronor.)

Ett sista fall återstår och det är om vi har sådan otur att vi drar båda svart bollarna. Då återstår endast en vit boll varför grenen som leder ner till sista utfallet/lövet är annoterad med sannolikheten 1. Förlust 100 kronor, som också kan modelleras som negativ vinst, alltså vinst: -100 kronor. I rektangeln under lövet som symboliserar det här tråkiga utfallet ritar vi alltså in alla bollar: två svarta och en vit.

Vi ska nu åskådliggöra utfallsrummet. Varje löv i trädet representerar ett möjligt utfall, vi spelar för vinst och därmed slutar vi inte förrän vi har den vita bollen. Sannolikheten för varje enskilt utfall kan beräknas med multiplikationsregeln, att få utfallet två svart och en vit har sannolikheten $2/3 \cdot 1/2 \cdot 1$ som är sannolikheterna för de tre händelserna ”vi tar en svart, sedan en svart, och sist en vit” som innebär att vi följer den längsta vägen i vårt händelseträd. Den sannolikeheten är tydligen

$$2/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/3.$$

På samma sätt kan sannolikheten för utfallet att vi få en svart och vit boll beräknas till $2/3 \cdot 1/2 = 1/3$ och utfallet att vi få precis en vit boll är $1/3$ (som också kan uppfattas som en produkt av en faktor). Med denna utredning kan vi ge följande skiss av utfallsrummet:



De tre utfallen har vardera alltså lika stora sannolikheter att inträffa.

Den förväntade vinsten blir nu, enligt definitionen som gavs på tentan talet

$$\frac{1}{3} \cdot 300 + \frac{1}{3} \cdot 100 + \frac{1}{3} \cdot (-100) = 100$$

när vi spelar det här spelet föväntar vi alltså oss att vinna i genomsnitt 100 kronor, så svaret på frågan om vi gärna spelar detta spel är JA (förutsatt att vi vill vinna förstås).