Föreläsning 2, del e (demonstration testuppgifter)

<u>1.16</u> Visa med induktion att, då $n \in \mathbb{Z}_+$

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

d) $3^{2n-1} + 2^{n+1}$ är delbart med 7

<u>Lösning</u>

a) Basfall: Då $n=1$ har vi $VL = 1$ och

$$HL = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = VL \quad \text{ok!}$$

Induktionsantagande: Anta att

$$\sum_{k=1}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2} \text{ för något } p \in \mathbb{Z}_+.$$

Då får vi

$$\sum_{k=1}^{p+1} k = \sum_{k=1}^{p} k + (p+1) = (\text{ind.-ant.})$$

$$= \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{2(p+1)}{2} =$$

$$= \frac{(p+2)(p+1)}{2} = \frac{(p+1)((p+1)+1)}{2} \quad \text{ok!}$$

Klart enligt induktionsprincipen!

d) Basfall: Då $n=1$ har vi

$$3^{2n-1} + 2^{n+1} = 3 + 2^2 = 7 = 7 \cdot 1 \quad \text{ok!}$$

Induktionsantagande: Anta att

$3^{2p-1} + 2^{p+1} = 7k$ för något heltal k.

Är då $3^{2(p+1)-1} + 2^{(p+1)+1}$ också delbart med 7?

$$3^{2(p+1)-1} + 2^{(p+1)+1} = 3^{2p+1} + 2^{p+2} =$$

$$= 3^{2p-1}3^2 + 2^{p+2} = (\text{ind.-ant.})$$

$$= (7k - 2^{p+1}) \cdot 3^2 + 2^{p+2} =$$

$$= 7k \cdot 3^2 - 2^{p+1} \cdot 3^2 + 2^{p+1} \cdot 2 =$$

$$= 7k \cdot 3^2 - 2^{p+1}(3^2 - 2) =$$

$$= 9 \cdot 7k - 7 \cdot 2^{p+1} = 7\underbrace{(9k - 2^{p+1})}_{\text{heltal}} \quad \text{ok!}$$

Klart enligt induktionsprincipen!