Föreläsning 8, del a

Integration av rationella funktioner (2.7)

- Frågan som vi ska besvara på denna och nästa föreläsning:
  - Hur integrerar man en rationell funktion? (ett bråk av två polynom)

  Ex: $\int \frac{3x^4+4x-1}{x^3-2x}\,dx = ?$

- Verktyg som vi behöver:
  - polynomdivision
  - faktorisering av polynom
  - kvadratkomplettering

  } repetition

  - partialbråksuppdelning ← nytt!

Def Kom ihåg: ett polynom av grad n i variabeln x är ett uttryck av formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

där koefficienterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är konstanter och $a_n \neq 0$.

grad $p(x) = n$

Ex Polynom: -3, π, x^2, $\sqrt{5}-x$, $x^7+\frac{x}{2}$, ...

Ej polynom: e^x, $\sin x$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $x^{5/3}$, ...

Vi ska alltså hitta alla primitiva funktioner till funktioner av formen $\frac{T(x)}{N(x)}$ där $T(x)$ och $N(x)$ är polynom, och $(x) \neq 0$.

Om grad $T(x) \geq$ grad $N(x)$ så är första steget att utföra polynomdivision och skriva $\frac{T(x)}{N(x)}$ som

$$\frac{T(x)}{N(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{N(x)} \quad \text{där}$$

grad $K(x)$ = grad $T(x)$ − grad $N(x)$,

grad $R(x)$ < grad $N(x)$.

Ex

$$\frac{3x^4+4x-1}{x^3-2x} = 3x + \frac{6x^2+4x-1}{x^3-2x}$$

grad 4 / grad 3 — grad 1 — grad 2 / grad 3

$4 \geq 3$ $\quad$ $1 = 4-3$ $\quad$ $2 < 3$

Föreläsning 8, del b

Vi antar nu att grad $T(x) <$ grad $N(x)$ i den rationella funktionen $\frac{T(x)}{N(x)}$ som vi vill integrera. (Antingen har vi ett sådant bråk från början, eller så får vi det som rest när vi utför polynomdivision.)

Vi studerar först fallet grad $N(x) = 1$, sedan grad $N(x) = 2$, ...

---

grad $N(x) = 1$:

Vi antar alltså att $N(x)$ är ett förstagradspolynom, $N(x) = ax + b$, där a och b är konstanter, och $a \neq 0$.

Eftersom vi dessutom antar att

grad $T(x) <$ grad $N(x)$

måste $T(x)$ vara ett polynom av grad 0, alltså en nollskild konstant, $T(x) = c \neq 0$.

Genom att använda standardintegralen

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

och den allmänna integrationsregeln

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

där F är en primitiv funktion till f, får vi (om vi sätter $f(x) = \frac{1}{x}$ och $F(x) = \ln|x|$)

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = c\int \frac{1}{ax+b}\,dx =$$

$$= c\int f(ax+b)\,dx = \frac{c}{a}F(ax+b) + C =$$

$$= \frac{c}{a}\ln|ax+b| + C$$

Ex

$$\int \frac{1}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$$

$$\int \frac{2}{x+5}\,dx = 2\ln|x+5| + C$$

Föreläsning 8, del c

grad $N(x) = 2$:

Vi antar nu att nämnaren $N(x)$ i den rationella funktionen $\frac{T(x)}{N(x)}$ som vi vill integrera är ett andragradspolynom.

Eftersom vi dessutom antar att täljaren $T(x)$ är ett polynom av lägre grad, måste $T(x)$ antingen vara en nollskild konstant eller ett förstagradspolynom.

Vi börjar med att studera några enkla specialfall av andragradspolynom $N(x)$.

Först $N(x) = x^2$. Då får vi:

$$\int \frac{ax+b}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{ax}{x^2} + \frac{b}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int \frac{ax}{x^2}\,dx + \int \frac{b}{x^2}\,dx =$$

$$= a\int \frac{x}{x^2}\,dx + b\int \frac{1}{x^2}\,dx \;(=) \longrightarrow$$

$$\rightarrow (=)\; a\int \frac{1}{x}\,dx + b\int x^{-2}\,dx =$$

$$= a\ln|x| + b\,\frac{1}{(-1)}\,x^{-1} + C =$$

$$= a\ln|x| - \frac{b}{x} + C$$

(Denna räkning gäller även då $a=0$, alltså både för polynom $T(x) = ax+b$ av grad 0 och 1.)

Ex) $$\int \frac{2x-3}{x^2}\,dx = 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$$

Vi går vidare till speciallfallet $N(x) = x^2 + \alpha$ där $\alpha > 0$. Vi behöver standardintegralen

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

som kan generaliseras till

$$\int \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx = \int \frac{1}{\alpha\left(\frac{x^2}{\alpha}+1\right)}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1/\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C.$$

Föreläsning 8, del d

Vi har alltså

$$\int \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C$$

för alla $\alpha > 0$.

Genom att använda integrationsregeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

får vi vidare (om vi sätter $f(x) = x^2+\alpha$)

$$\int \frac{x}{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|f(x)| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+\alpha| + C$$

och slutligen

$$\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha}\,dx = a\int \frac{x}{x^2+\alpha}\,dx + b\int \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\ln|x^2+\alpha| + \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C.$$

Vi avslutar med specialfallet $N(x) = x^2 - \alpha$ där $\alpha > 0$. Då utnyttjar vi att

$$x^2 - \alpha = x^2 - (\sqrt{\alpha})^2 = (x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})$$

(konjugatregeln!) och att

$$\frac{1}{x-\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{x+\sqrt{\alpha}} = \frac{x+\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} + \frac{x-\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} =$$

$$= \frac{(x+\sqrt{\alpha})+(x-\sqrt{\alpha})}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} = \frac{2x}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} = 2\,\frac{x}{x^2-\alpha},$$

$$\frac{1}{x-\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{x+\sqrt{\alpha}} = \frac{x+\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} - \frac{x-\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} =$$

$$= \frac{(x+\sqrt{\alpha})-(x-\sqrt{\alpha})}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} = 2\sqrt{\alpha}\,\frac{1}{x^2-\alpha}.$$

Vi får $\frac{ax+b}{x^2-\alpha} = a\,\frac{x}{x^2-\alpha} + b\,\frac{1}{x^2-\alpha} =$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x-\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{x+\sqrt{\alpha}}\right) + \frac{b}{2\sqrt{\alpha}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{x+\sqrt{\alpha}}\right)$$

Vi kan alltså skriva $\frac{ax+b}{x^2-\alpha}$ som en summa av rationella funktioner där nämnaren är ett förstagradspolynom (som vi redan kan integrera)!
Mer om detta nästa gång!

Föreläsning 8, del e

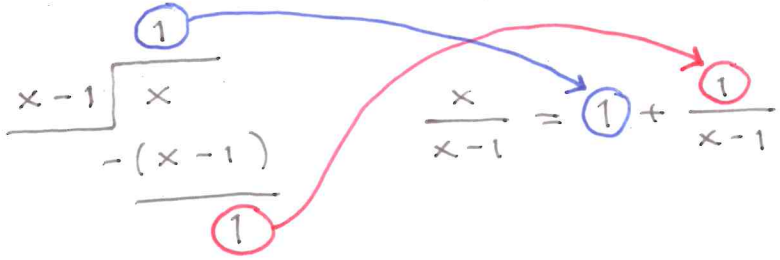
2.10 Beräkna med hjälp av polynomdivision:

a) $\int \frac{x}{x-1}\,dx$

Lösning:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Med uppställning:



$$\int \frac{x}{x-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{dx}{x-1} = x + \ln|x-1| + C$$

Svar: $\int \frac{x}{x-1}\,dx = x + \ln|x-1| + C$

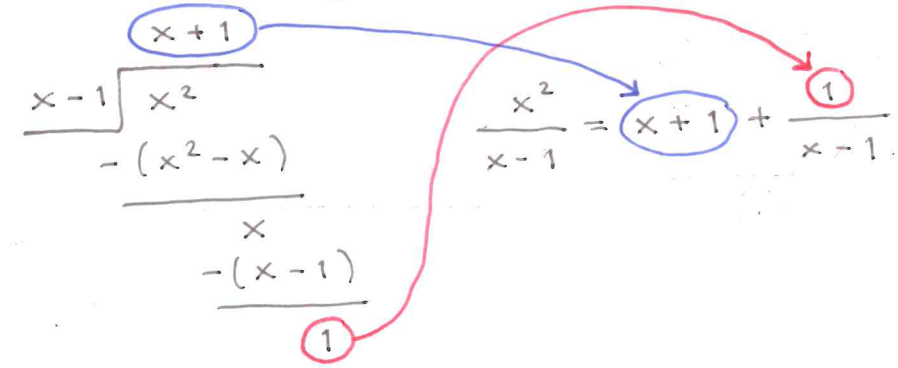
b) $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$

Lösning: (konjugatregeln)

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} =$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$$

Med uppställning:



$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right) dx =$$

$$= \int x\,dx + \int dx + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$$

Svar: $\int \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$