# Tentamen SF1629 11 Januari 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor, information om detta publiseras på Kurshemsidan för SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
**På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.**

**OBS:** För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

## Del 1.

**1.** Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \text{för } x \in (0,1) \text{ och } t > 0 \\ -\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(1,t) = 0 & \text{för } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \end{array} \tag{1}$$

där

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{för } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{för } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

**[4 poäng]**

**2.** Låt $V \subset L^2([-1,1];\mathbb{C})$ vara underrummet som spänns upp av basfunktionerna $\phi_0(x) = 1$ och $\phi_1(x) = x^2$. Hitta den funktion $f \in V$ som minimerar

$$\|\cos(x) - f(x)\|.$$

**[4 poäng]**

**3.** Hitta en lösning till följande integralekvation

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{-|t|}dt = \frac{1}{\cosh(x)}. \tag{2}$$

**[4 poäng]**

**4 a)** Låt $a(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, vara en given följd av reella tal och $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}a(n)$ vara $z-$transformen av $a(n)$. Låt $k \geq 0$ vara ett heltal och härled ett explicit uttryck för $z-$transformen av $a(n+k)$ i termer av $A(z)$ och $a(0), a(1), \ldots, a(k-1)$.

**[2 poäng]**

**b)** Låt $a(0) = a(1) = 0$ och $a(n)$ uppfylla relationen

$$a(n+2) - 7a(n+1) + 12a(n) = 2, \text{ för } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Använd $z-$transformen för att härleda en formel för $a(n)$.

**[2 poäng]**

**Vänd!**

## Del 2.

**5.** Låt $f$ vara en likformigt kontinuerlig funktion på enhetscirkeln $\mathbb{T}$; d.v.s. för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett $\delta > 0$ så att för alla $x, y \in \mathbb{T}$ så att $|x-y| < \delta$ kommer $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Visa att det, för varje $\epsilon > 0$, finns ett trigonometriskt polynom

$$p_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

så att

$$|f(x) - p_N(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Du får använda att

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left( \frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right)^2,$$

där $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{int}$ samt att

$$F_N(t) \geq 0, \tag{3}$$

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(t)dt = 1, \tag{4}$$

och att för alla $\delta > 0$ och $x \in \mathbb{T}$ så kommer

$$\lim_{N \to \infty} \int_{t \in \mathbb{T}, |t-x| > \delta} F_N(t-x)dt = 0 \tag{5}$$

utan bevis.

**[4 poäng]**

**6.** Härled en lösningsformel för lösningen $u(x,t)$ till följande ekvationer:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(x-y,t)dy \quad \text{för } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{array} \tag{6}$$

där $f \in \mathcal{S}$ är en given funktion i Schwarzklassen.

Din härledning får vara informell; d.v.s. du behöver inte visa att integraler i lösningen är konvergenta, att det är tillåtet att derivera under integraler et.c. Ditt svar för innehålla olösta integraler, elementära funktioner (sin, cos exponentialfunktionen et.c.) och funktionen $f$.

**[4 poäng]**

## Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$
2. $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$
4. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega}dt$
5. $\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$
6. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
7. Om $a(n) = \alpha^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ så är $z-$transformen av $a(n)$ lika med $A(z) = \frac{z}{z-\alpha}$
8. Låt $\theta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & \text{om } k \leq n \end{cases}$ då är $z-$transformen av $\alpha^n\theta(n-k)$ lika med $\frac{z^{k-1}}{z-\alpha}$.
9. $\int x^2 \cos(x)dx = -2\sin(x) + 2x\cos(x) + x^2\sin(x)$.

**Lycka Till!**