Föreläsning 14, del a

Rotationskroppars volymer (4.2)

- fortsättning: rotation kring y-axeln

Differentialekvationer

- separabla (5.1)

Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[a, b]$ och låt D vara området i planet som begränsas av x-axeln, kurvan $y = f(x)$ och linjerna $x = a$ och $x = b$.

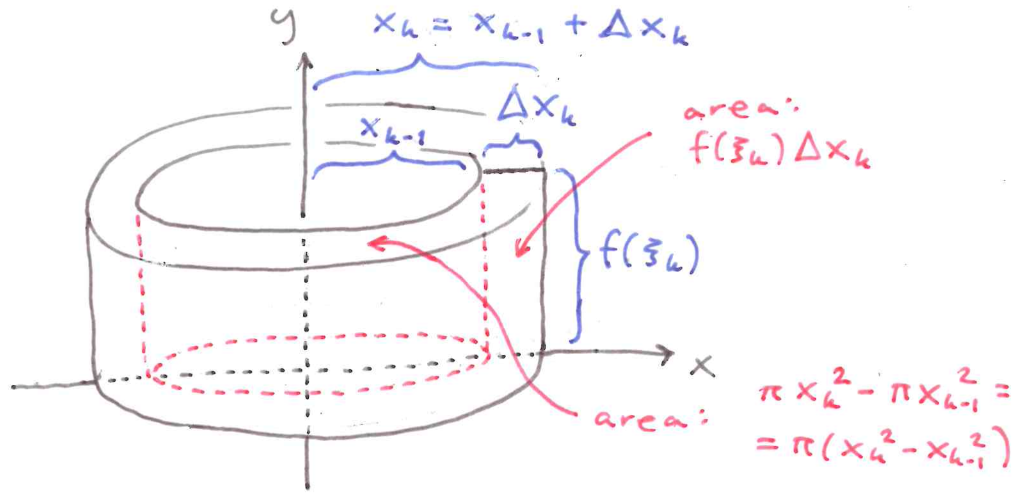
Förra gången såg vi att volymen av kroppen som alstras då D roterar kring x-axeln är

$$\pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Vad är volymen av kroppen som alstras då D roterar kring y-axeln?

Vi antar här att $0 \leq a < b$ och att $f(x) \geq 0$ för alla $x \in [a, b]$ (viktigt!)

För varje $n = 1, 2, \ldots$ gör vi samma indelning av $[a, b]$ som förut (se Föreläsning 13, del d). Låt d_n vara längden av det längsta delintervallet, $d_n \to 0$ då $n \to \infty$.



Den här gången ska vi summera volymen av cylindrar där basytorna är cirkelringar.

Cirkelringens area: $\pi(x_k^2 - x_{k-1}^2) =$

$$= \pi(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1}) = \pi \Delta x_k (x_{k-1} + x_k) =$$

$$= \pi \Delta x_k (x_{k-1} + (x_{k-1} + \Delta x_k)) =$$

$$= 2\pi x_{k-1} \Delta x_k + \pi (\Delta x_k)^2$$

Cylinderns volym: $2\pi f(\xi_k) x_{k-1} \Delta x_k + \pi f(\xi_k)(\Delta x_k)^2$

Volymen av rotationskroppen:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(2\pi f(\xi_k) x_{k-1} \Delta x_k + \pi f(\xi_k)(\Delta x_k)^2 \right) =$$

$$= 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) x_{k-1} \Delta x_k + \pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\Delta x_k)^2 =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\, x \, dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{eftersom } \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\Delta x_k)^2 \leq \\ \leq d_n \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \to \\ \to 0 \cdot \int_a^b f(x)\,dx = 0 \text{ då } n \to \infty \end{array} \right)$$