Föreläsning 3, del b

Sats Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så är också följden av termer $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ konvergent, med gränsvärdet noll:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Bevis Sätt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ och $\lim_{n\to\infty} s_n = s_\infty$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = s_{n-1} + a_n$$

$$\Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1} \to s_\infty - s_\infty = 0 \text{ då } n \to \infty.$$

$s_n \to s_\infty$ då $n \to \infty$

$s_{n-1} \to s_\infty$ då $n \to \infty$

$\square$

Satsen kan också formuleras:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$$

Ex Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{2^k + k^3}$ konvergent?

$$\frac{2^{k+1}}{2^k + k^3} = \frac{2^k \cdot 2}{2^k(1 + k^3/2^k)} = \frac{2}{1 + k^3/2^k} \to$$

$$\to \frac{2}{1+0} = 2 \neq 0 \text{ då } k \to \infty$$

$\Rightarrow$ serien är divergent!

Varning! Omvändningen av satsen gäller ej. En serie kan vara divergent trots att termerna går mot noll.

Ex Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergent?

Anta att det finns ett gränsvärde

$$s_\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)}_{\frac{1}{3}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2} + s_\infty$$

Motsägelse! Alltså är serien divergent.