Kurs: MVE051/MSG810
Lärare: T. Vilkas

Maj 2022

Övningstentamen

i kursen

Matematisk statistik och diskret matematik

Hjälpmedel: *Godkänd räknedosa, egen* **handskriven** *formelsamling (ett A4-ark, tvåsidigt) samt med skrivningen utdelade tabellsidor.*

Examinator: Timo Vilkas, 031 772-5316

OBS! Markera tydligt på varje inlämnat blad, vilken uppgift det gäller. Använd inte samma sida till flera uppgifter (olika deluppgifter på samma sida går bra). Ange svar tydligt, förenkla svaret så långt som möjligt, och motivera dina svar väl. Var noga med att förklara vad du gör, hur och varför. Det är i hög grad lösningen som ger poäng, inte själva svaret. Även ofullständig eller bristfällig lösning kan ge poäng, så försök även om du är osäker. Tänk också på att inte fastna för länge i någon uppgift!

För betyg 3 (godkänt) krävs 12 poäng. Chalmers studenter får betyg 4 med 18 poäng och betyg 5 med 24 poäng. För GU studenter krävs 22 poäng för betyg VG.

Uppgift 1. En grupp av 5 vänner går till en liten bio och sätter sig i första raden, som har 7 platser.

(a) Hur många olika sätt finns det för dem att fördela sig på platserna?

(b) Hur många sätt ifall de vill sitta i grupp, dvs. utan tomma platser emellan?

(c) Om de nu väljer ett sätt likfördelat ur motsvarande mängd kombinationer, vad är sannolikheten att ingen av de mellersta tre platserna i första raden är ledig – utan restriktioner som i (a) resp. med restriktionen i (b)?

Uppgift 2. Låt X vara en kontinuerlig slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \mathrm{e}^{x}, & \text{för } x < 0 \\ c \cdot \mathrm{e}^{-x}, & \text{för } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Beräkna konstanten c.

(b) Beräkna den momentgenererande funktionen $m_X(t)$.

(c) Beräkna väntevärde och varians av X.

Uppgift 3. Låt (X,Y) vara en slumpvektor med sannolikhetsfunktion

$$f(x,y) = \frac{x}{3y}, \quad \text{för alla } x,y \in \{1,2,3,4\} \text{ som uppfyller } x < y.$$

(a) Bestäm den betingade sannolikhetsfunktionen $f_{X|3}$ för X givet $Y = 3$.

(b) Beräkna $\mathbb{P}(X \leq 2 \,|\, Y > 2)$.

(c) Är X och Y oberoende?

Uppgift 4. I en lek kastas ett symmetriskt mynt (i oberoende omgångar) tills antingen krona eller klave har kommit tre gånger i rad.

(a) Välj ett tillståndsrum S samt en övergångsmatris P som beskriver leken som en absorberande Markovkedja.

(b) Hur många omgångar tar det i väntevärde tills leken tar slut?

Ledning: Om tillståndet X_j anger hur ofta det, som kom i omgång j (krona/klave), kom i rad sist, dyker tillstånd 0 bara upp när spelet börjar och det underlättar analysen avsevärt att bortse ifrån det och räkna ifrån omgång 1 istället.

Uppgift 5. Volymen i vinkartonger antas vara normalfördelad med väntevärde μ och varians σ^2. Ett stickprov på 10 kartonger ger följande mätvärden x_i, $i = 1, \ldots, 10$ (i dl):

30.4	30.1	30.0	29.8	29.7
30.0	30.1	29.8	30.2	30.1

(a) Beräkna stickprovsmedelvärdet.

(b) Beräkna ett 95%-konfidensintervall för μ med given standardavvikelse $\sigma = \frac{1}{5}$.

(c) Beräkna ett 95%-konfidensintervall för μ med okänd varians.
(Räknehjälp: $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 9012.4$)

Uppgift 6. Ett konsultföretag vill ta reda på vilken andel p av mejl som anländer på chalmers.se adresser är oönskade massmejl. I det syftet tar de fram ett stickprov på 10 000 mejl och hittar att 1984 av dem är sådana oönskade mejl.

(a) Bestäm ett konfidensintervall i vilket den verkliga proportionen p ligger med 99% säkerhet.

(b) Hur många mejl hade behövts för att kunna vara 95% säker på att det skattade värdet inte avviker fler än 2 procentpunkter ifrån den verkliga proportionen?
Besvara frågan för både situationen i vilken man har en apriori skattning av $\hat{p} = \frac{1}{5}$ och den där man inte har någon förkunskap om p alls.

Uppgift 7. Du står framför en urna med 30 bollar: 3 röda, 5 gröna, 7 svarta och 15 blåa, som alla bara skiljer sig genom färgen. På hur många sätt kan du välja ut 5 bollar ur urnan, om du ska ta minst en grön, inte fler än 2 svarta och ett jämnt antal blåa?

Uppgift 8. Tabellen nedanför återger hyrpriser h_i [i tSEK] för lägenheter i centrala Göteborg som annonserades i år. Boytan a_i [i m^2] kan anses som förklarande variabel.

a_i	55	103	27	35	62	63	95	23	31	75
h_i	8.5	13.9	4.9	6.0	9.5	8.9	14.0	4.1	5.5	11.3

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = 569 \quad \sum_{i=1}^{10} h_i = 86.6$$

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = 39541 \quad \sum_{i=1}^{10} h_i^2 = 865.68 \quad \sum_{i=1}^{10} a_i h_i = 5833.5$$

(a) Bestäm regressionslinjen för hyrpriset med boytan som förklarande variabel utifrån datapunkterna.

(b) Finns det ett signifikant linjärt samband mellan hyrpris och boyta?
Formulera en motsvarande nollhypotes och pröva den på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.
Som vanligt antar vi normalfördelade fel med okänd varians σ^2.

(c) Beräkna ett 90% konfidensintervall för y-skärningen β_0.