Föreläsning 15, del a

Linjära diffekvationer av första ordningen (5.3)

Kom ihåg från förra gången:

Betrakta en första ordningens diffekvation $y' = h(x,y)$ där h är en funktion av x och y (och $y = y(x)$ är i sin tur en funktion av x, som vi vill bestämma).

Om högerledet kan faktoriseras $h(x,y) = f(x)g(y)$ i en produkt av en funktion f av x, och en funktion g av y, så är diffekvationen separabel.

Ex)

$y' = x^2(y+1)$ separabel !

$y' = \sqrt{y} + 2xy$ ej separabel !

$y' = \frac{3y}{\ln x}$ separabel !

$y' = e^x + \sin y$ ej separabel !

Specialfall av separabla diffekvationer:

- $y' = f(x)$ Allmän lösning: $y(x) = F(x) + C$ där F är en primitiv funktion till f.
- $y' = y$ Allmän lösning: $y(x) = Ce^x$

Ett något mer komplicerat specialfall:

$y' = f(x)\,y, \quad y > 0$

Anta att F är en primitiv funktion till f.

Vi löser denna diffekvation enligt receptet förra gången:

- Flytta över funktionen av y till vänsterledet så att funktionen av x är ensam i högerledet:

$$y' = f(x)\,y \iff \frac{1}{y}y' = f(x)$$

- Integrera funktionen av y som multiplicerar y':

$$\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y}$$

Faktorn y' dyker upp som en inre derivata !

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln y = \left(\frac{d}{dy}\ln y\right)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y'}y'$$

Diffekvationen blir alltså $\frac{d}{dx}\ln y = f(x)$

- Integrera båda leden med avseende på x:

$$\frac{d}{dx}\ln y = f(x) \iff \ln y = F(x) + C$$

- Lös ut y!

$$\ln y = F(x) + C \iff y = e^{F(x)+C} = \underline{e^C e^{F(x)}}$$