Tentamen SF1629 16e April 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiseras på Kurshemsidan för SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \text{för } x \in (0,\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{för } t > 0 \\ u(x,0) = x & \text{för } x \in (0,\pi). \end{array} \tag{1}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

2. Lös följande randvärdesproblem på enhetsdisken $\mathbf{D}$:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(r,\phi) = 0 & \text{på } \mathbf{D} \\ u(1,\phi) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < \phi < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{för } x = 0 \text{ och } x = \pi \\ 0 & \text{för } \pi < \phi < 2\pi. \end{cases} & \end{array}$$

Där Δ är laplacianen definierad enligt:

$$\Delta u(r,\phi) = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u(r,\phi)}{\partial \phi^2}.$$

[4 poäng]

3. Givet att

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{för } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{för } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 3 & \text{för } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

är en tempererad distribution (du behöver alltså inte visa detta) beräkna derivatan av f direkt utifrån definitionen av en distributions derivata.

[4 poäng]

4. Använd Fouriertransformen för att lösa följande diffrentialekvation

$$\begin{array}{ll} u''(x) - 4u(x) = \delta_0(x) - \delta_2(x) & \text{för } x \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0. & \end{array}$$

[4 poäng]

Vänd!

Del 2.

5. I den här frågan behandlar vi följande egenvärdesproblem

$$\begin{array}{ll} y''(x) + \lambda y(x) = 0 & \text{för } x \in (0, \pi/4) \\ y(0) = y(\pi/4) = 0. & \end{array}$$

a) Hitta alla egenvärden λ och de till egenvärderna hörande egenfunktionerna y_λ normaliserade så att $\|y_\lambda\| = 1$ (här är $\|y_\lambda\|$ den vanliga L^2 normen på intervallet $(0, \pi/4)$).

[2 poäng]

b) Visa att egenfunktionerna utgör en ortogonal bas för $L^2(0, 2)$. Du får använda alla satser från kursen förutsatt att du kan formulera dem korrekt.

[2 poäng]

6. Antag att f är en kontinuerligt deriverbar L^1 funktion på $\mathbb{R}$. Visa att

$$f(t_0) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega.$$

Du får antaga att alla funktioner är integrerbara och att det är oproblematiskt att byta ordning på integraler.

[4 poäng]

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(x))(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-xs} dt$
2. $\mathcal{L}(f'(x))(s) = s\mathcal{L}(f(x))(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{as}{s^2+a^2}$
4. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$
5. Låt $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq 0 \\ 1 & \text{om } 0 < x \end{cases}$ då är $\mathcal{L}(f(x-T)\theta(x-T))(s) = e^{-Ts}\mathcal{L}(f(x))(s)$.
6. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\omega} dt$
7. $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ för $a > 0$
8. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
9. $\int_0^\infty \frac{\sin(Ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ för $A > 0$.
10. **Riemann-Lebesgue Lemma:** För I ett intervall (möjligtvis obegränsat)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) dx = 0.$$

Lycka Till!