Föreläsning 3, del a

Serier (1.3)

- konvergens / divergens
- geometriska serier (1.4)

En serie är ett uttryck av formen

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

Skrivs med summabetecknigen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

För varje serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ finns en följd av delsummor: en talföljd $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ där delsumman s_n är summan av de n första termerna i serien: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 1$ konvergent!

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n}$

$\to \frac{1}{1+0} = 1$ då $n \to \infty$

$(s_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$s_\infty = 1$

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \cdots$ divergent!

$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \to \infty$ då $n \to \infty$

$(s_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 3, 6, 10, \ldots$

Def En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent om dess följd av delsummor är en konvergent talföljd (alltså, om det finns ett gränsvärde $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$), annars divergent.

Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så kallas gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ för seriens summa och skrivs likadant:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s_\infty$$

(Samma beteckning används alltså för en serie och för dess summa. I boken används s_∞ för summan.)

Föreläsning 3, del b

Sats Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så är också följden av termer $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ konvergent, med gränsvärdet noll:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Bevis Sätt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ och $\lim_{n\to\infty} s_n = s_\infty$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = s_{n-1} + a_n$$

$$\Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1} \to s_\infty - s_\infty = 0 \text{ då } n\to\infty.$$

$s_n \to s_\infty$ då $n\to\infty$

$s_{n-1} \to s_\infty$ då $n\to\infty$

□

Satsen kan också formuleras:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$$

Ex Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{2^k + k^3}$ konvergent?

$$\frac{2^{k+1}}{2^k + k^3} = \frac{2^k \cdot 2}{2^k(1 + k^3/2^k)} = \frac{2}{1 + k^3/2^k} \to$$

$$\to \frac{2}{1+0} = 2 \neq 0 \text{ då } k\to\infty$$

$\Rightarrow$ serien är divergent!

Varning! Omvändningen av satsen gäller ej. En serie kan vara divergent trots att termerna går mot noll.

Ex Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergent?

Anta att det finns ett gränsvärde

$$s_\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) = \frac{1}{2} + s_\infty$$

Motsägelse! Alltså är serien divergent.

Föreläsning 3, del c

Def En aritmetisk serie är en serie där följden av termer är en aritmetisk talföljd. En geometrisk serie är en serie där följden av termer är en geometrisk talföljd.

Anta att den aritmetiska serien

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots$$

är konvergent. Då gäller, enligt satsen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \left(a_1 + (n-1)d\right) = 0$$

$$\iff a_1 = d = 0$$

Den enda konvergenta aritmetiska serien är alltså

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

Ganska tråkig!

Geometriska serier är roligare!

Sats Den geometriska serien ($a_1 \neq 0$)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots$$

är konvergent om och endast om $-1 < q < 1$ ($\Leftrightarrow |q| < 1$) och summan är då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \dfrac{a_1}{1-q}$

Bevis

- Om $|q| \geqslant 1$: $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$

  $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1}{q} q^n \neq 0$

  $\Rightarrow$ serien är divergent enligt förra satsen!

- Om $|q| < 1$: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} \to$

  $\to a_1 \dfrac{1-0}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$ då $n \to \infty$. $\square$

Föreläsning 3, del d

Ex $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ där $a_1 = \frac{1}{2}$ och

$-1 < q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ serien är konvergent

med summan $\frac{a_1}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$

Ex $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{k-1} =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ där $a_1 = 2$ och $q = 2 > 1$

$\Rightarrow$ serien är divergent!

Formeln för summan av en geometrisk serie kan användas för att skriva om ett rationellt tal från decimalform till formen av en kvot av två heltal:

Ex $0,181818\ldots =$

$= 0,18 + 0,0018 + 0,000018 + \cdots =$

$= \frac{18}{100} + \frac{18}{10000} + \frac{18}{1000000} + \cdots =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{18}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{k-1} =$

$= \frac{18/100}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{18}{100 - 1} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$

Föreläsning 3, del e (demonstration testuppgifter)

1.12 Skriv den geometriska serien $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \cdots$ med summabeteckning och beräkna dess summa.

Lösning: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \cdots =$

$= \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{9}\right) + \cdots =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ där $a_1 = \frac{3}{4}$ och

$q = \frac{-1/2}{3/4} = \frac{1/3}{-1/2} = \frac{-2/9}{1/3} = \cdots = -\frac{2}{3}$

$-1 < -\frac{2}{3} < 1$ (ok!)

$\frac{a_1}{1-q} = \frac{3/4}{1-(-2/3)} = \frac{3/4}{1+2/3} = \frac{3/4}{5/3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

Svar: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{9}{20}$

1.13 Betrakta den geometriska serien

$x + x^3 + x^5 + \cdots$

a) Skriv den med summabetecknig!

b) Undersök för vilka värden den är konvergent och beräkna dess summa för dessa värden på x!

c) Lös ekvationen $x + x^3 + x^5 + \cdots = \frac{1}{2}$

Lösning:

a) $x + x^3 + x^5 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x(x^2)^{k-1}$

b) $|x^2| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

c) Vi ska hitta alla x sådana att $|x| < 1$ och $x + x^3 + x^5 + \cdots = \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

$|-1-\sqrt{2}| > 1, \quad |-1+\sqrt{2}| < 1$

Svar: a) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}$ c) $x = \sqrt{2} - 1$

b) $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = \frac{x}{1-x^2}$