Lösningsförslag SF1683/SF1632 11 Januari 2019

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$
\begin{array}{ll}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \text{för } x \in (0,1) \text{ och } t > 0 \\
-\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(1,t) = 0 & \text{för } t > 0 \\
u(x,0) = f(x) &
\end{array}
\tag{1}
$$

där

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{för } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{för } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}
$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 1: Vi antar att lösningen är på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Om vi sätter in detta i diffeentialekvationen och delar med $X(x)T(t)$ så får vi att

$$
\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.
$$

Då högerledet är oberoende av x och vänsterledet av t så måste båda leden vara konstanta; d.v.s.

$$
X''(x) \pm \lambda^2 X(x) = T'(t) \pm \lambda^2 T(t) = 0. \tag{2}
$$

Vi får tre fall: $\lambda = 0$ i (2), eller $\lambda \neq 0$ med $+$ resplektive $-$ i (2). Men om $\lambda = 0$ så får vi att $X(x) = ax + b$, men det första randdatat implicerar då att $a = 0$ och sedan implicerar det andra randdatat att $0 = X(1) = 0 \cdot 1 + b$ så $b = 0$. Men om $a = b = 0$ så är $X(x) = 0$ och vi har endast den triviala lösningen - så $\lambda = 0$ ger inga icke-triviala lösningar.

Om vi har $-$ och $\lambda \neq 0$ i (2) så får vi lösningen $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$. Men då ger $0 = X'(0) = (a-b)\lambda$ så $a = b$ men det andra randdatat ger då att $0 = (ae - b/e)$ vilket implicerar att $a = b = 0$ eftersom $a = b$. Så det enda fallet som ger icke-triviala lösningar är om $\lambda \neq 0$ och om vi har $+$ i (2).

Om vi har $+$ i (2) så är lösningarna

$$
X(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x).
$$

Eftersom $0 = X'(0) = b\lambda$ så måste $b = 0$. Och $0 = X(1) = a\lambda\cos(\lambda)$ implicerar att $a = 0$ (vilket ger en trivial lösning igen) eller $\lambda = \frac{\pi}{2} + n\pi$ för $n \in \mathbb{N}$.

För att förenkla notationen så skriver vi $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Vi får att följande funktioner är lösningar till differentialekvationen och randdata:

$$
ae^{-\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x).
$$

För att få en lösning till initialdata så ansätter vi att lösningen är

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x).
$$

Vi beräknar a_n genom att identifiera a_n med Fourierkoefficienterna för $f(x)$: d.v.s.[1]

$$
a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(\lambda x)dx = 2\int_0^{1/2}\cos(\lambda_n x)dx = 2\left[\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n}\right]_{x=0}^{1/2} = \frac{2\sin(\lambda_n/2)}{\lambda_n}.
$$

Vi får därför följande **Svar:** Lösningen är

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\lambda_n/2)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x)
$$

där $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

2. Låt $V \subset L^2([-1,1];\mathbb{C})$ vara underrummet som spänns upp av basfunktionerna $\phi_0(x) = 1$ och $\phi_1(x) = x^2$. Hitta den funktion $f \in V$ som minimerar

$$
\|\cos(x) - f(x)\|.
$$

[1] Om man inte kommer ihåg formeln (vilket jag själv inte gjorde) så är det enkelt att härleda den. Vi beräknar helt enkelt normen i kvadrat av $\cos(\lambda_n)$ i $L^2([0,1])$ enligt $\int_0^1 \cos^2(\lambda_n x)dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n x)}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ för $n \geq 1$ vilket förklarar attt vi multiplicerar integralen med 2.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 2: Formeln för minsta kvadratanpassningen ger att lösningen är

$$\frac{\langle \cos(x), \hat{\phi}_0(x)\rangle}{\|\hat{\phi}_0\|^2}\hat{\phi}_0 + \frac{\langle \cos(x), \hat{\phi}_1(x)\rangle}{\|\hat{\phi}_1\|^2}\hat{\phi}_1, \tag{3}$$

om $\hat{\phi}_0$ och $\hat{\phi}_1$ är orthogonala vektorer som spänner upp V.

För att använda formeln så måste vi hitta en orthogonal bas för V vi väljer den basen $\hat{\phi}_0(x) = 1$ och (enl. Gram-Schmidt)

$$\hat{\phi}_1(x) = x^2 - \frac{1}{\int_{-1}^1 |\hat{\phi}_0|^2 dx}\int_{-1}^1 x^2\hat{\phi}_0(x)dx\hat{\phi}_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Insatt i (3) ger detta följande **Svar:** Den bästa approximationen av $\cos(x)$ i V ges av

$$\frac{1}{\int_{-1}^1 1dx}\left(\int_{-1}^1 \cos(x)dx\right) + \frac{1}{\int_{-1}^1\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 dx}\left(\int_{-1}^1\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\cos(x)dx\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \sin(1) + \left(-\frac{45}{4}\sin(1) + \frac{75}{4}\cos(1)\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

3. Hitta en lösning till följande integralekvation

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{-|t|}dt = \frac{1}{\cosh(x)}. \tag{4}$$

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 3: För enkelhetsskull så betecknar vi $g(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$.
Vi tar Fouriertransformationen av båda led, och använder faltningsformeln, vilket ger

$$\hat{f}(\omega)\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega) = \hat{g}(\omega).$$

Vi måste beräkna

$$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt = \int_0^\infty e^{-t}e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^0 e^{t}e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Det följer att

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1+\omega^2}{2}\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{g}(\omega) - (i\omega)^2\hat{g}(\omega)\right). \tag{5}$$

Eftersom[2] $\mathcal{F}(g'(x))(\omega) = i\omega\mathcal{F}(g)(\omega)$ så får vi att $-(i\omega)^2\hat{g}(\omega) = -\mathcal{F}(g'')(\omega)$. Om vi använder detta i (5) så får vi att

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(g - g'')(\omega).$$

Inverstransformationen och en enkel beräkning ger att

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) - g''(x)\right) = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^3(x)}.$$

4 a). Beräkna Laplacetransformen av $\cos(ax)$:

$$\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \int_0^\infty \cos(ax)e^{-sx}dx.$$

[1 poäng]

b) Använd Laplacetransformen för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &y''(x) + 4y(x) = 1 \qquad \text{för } x > 0 \\ &y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

[3 poäng]

[2] Även den här formeln är lätt att härleda eftersom en partiell integration ger $\mathcal{F}(g') = \int_R g'(x)e^{-i\omega x}dx = i\omega\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-i\omega x}dx = i\omega\mathcal{F}(g)(\omega)$.

Lösningsförslag Fråga 4. a) Vi använder Eulers formel:

$$\cos(ax) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

för att beräkna

$$\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(ia-s)x}dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(ia+s)x}dx =$$

$$= \frac{-1}{2(ia-s)} + \frac{1}{2(ia+s)} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

vilket är vårt svar på delfråga a.

b) Från den givna formeln för Laplacetransformen av en derivata samt initialdata får vi att

$$\mathcal{L}(y'') = s\mathcal{L}(y')(s) - y'(0) = s^2\tilde{y}(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\tilde{y}(s) - 1.$$

Vidare så är

$$\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-sx}dx = \frac{1}{s}. \tag{7}$$

Om vi laplacetransformerar båda led så får vi, efter att använda ekvationerna ovan, att

$$(s^2+4)\tilde{y}(s) = \frac{1}{s} + 1.$$

Vi kan skriva om detta som

$$\tilde{y}(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}.$$

Från deluppgift a) och den givna formeln för $\mathcal{L}(\sin(x))$ samt (7) så får vi att

$$\mathcal{L}(\frac{1}{2}\sin(2x))(s) + \mathcal{L}(1/4)(s) + \mathcal{L}(\frac{-1}{4}\cos(2x))(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}.$$

Eftersom Laplacetransformen är unik så följer det att

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}.$$

Del 2.

5. Låt f vara en likformigt kontinuerlig funktion på enhetscirkeln $\mathbb{T}$; d.v.s. för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett $\delta > 0$ så att för alla $x, y \in \mathbb{T}$ så att $|x - y| < \delta$ kommer $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Visa att det, för varje $\epsilon > 0$, finns ett trigonometriskt polynom

$$p_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

så att

$$|f(x) - p_N(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Du får använda att

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)}\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2,$$

där $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{int}$ samt att

$$F_N(t) \geq 0, \tag{8}$$

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(t)dt = 1, \tag{9}$$

och att för alla $\delta > 0$ och $x \in \mathbb{T}$ så kommer

$$\lim_{N\to\infty} \int_{t\in\mathbb{T}, |t-x|>\delta} F_N(t-x)dt = 0 \tag{10}$$

utan bevis.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 5. Vi börjar med att observera att

$$f * F_N(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t) F_N(t-x)dt = \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{im(t-x)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t) e^{im(t)} dt \right) e^{-imx},$$

d.v.s. $f * F_N(x)$ är ett trigonometriskt polynom. Det räcker därför att visa att, givet $\epsilon > 0$ så finns det ett $N > 0$ så att

$$|f * F_N(x) - f(x)| < \epsilon \tag{11}$$

för alla $x \in \mathbb{T}$.

För att visa (11) så använder vi först likformig kontinuuitet av f för att välja ett $\delta > 0$ så att

$$|x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| > \frac{\epsilon}{2}.$$

Det följer att

$$\begin{aligned} |f * F_N(x) - f(x)| &= \{\text{enl. } (9)\} = \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}} F(t-x)(f(t) - f(x))dt \right| \leq \qquad (12) \\ \leq \int_{|x-t|<\delta} F_N(t-x)|f(t) - f(x)|dt &+ 2 \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(t)| \int_{\mathbb{T}, |x-t| \geq \delta} F_N(t-x)dt = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

där vi också har använt triangelolikheten, den givna olikheten (8) ($F_N \geq 0$) samt elementära olikheter för integralen.[3]

Vi kan använda vårt val av δ för att skatta

$$I_1 \leq \sup_{|x-t|<\delta} |f(t) - f(t)| \int_{\mathbb{T}} F_N(t-x)dt \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{13}$$

eftersom $F_N \geq 0$ och integralen av F_N är 1 (d.v.s. den givna likheten (9)). För att skatta I_2 så observerar vi att $M = \sup |f(t)|$ existerar och är ändlig eftersom f är kontinuerlig så vi kan använda (10) för att härleda

$$\lim_{N \to \infty} I_2 = 2M \lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{T}, |x-t| \geq \delta} F_N(t-x)dt = 0.$$

Det följer att om N är tillräckligt stort så kommer

$$I_2 < \frac{\epsilon}{2}. \tag{14}$$

Om vi väljer N så stort att (14) håller så kommer (13), (14) insatta i (12) att ge

$$|f * F_N(x) - f(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Detta är vad vi skulle bevisa.

6. Härled en lösningsformel för lösningen $u(x,t)$ till följande ekvationer:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(x-y,t)dy \quad \text{för } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned} \tag{15}$$

där $f \in \mathcal{S}$ är en given funktion i Schwarzklassen.

Din härledning får vara informell; d.v.s. du behöver inte visa att integraler i lösningen är konvergenta, att det är tillåtet att derivera under integraler et.c. Ditt svar för innehålla olösta integraler, elementära funktioner (sin, cos exponentialfunktionen et.c.) och funktionen f.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 6. Vi gör en Fouriertransformation med avseende på x-variabeln och får

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \hat{u}(\omega,t), \tag{16}$$

där vi också använde faltningsformeln för Fouriertransformen och den givna formeln $\mathcal{F}(e^{-y^2})$.

Initialdata ger också att

$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega). \tag{17}$$

[3]Specifikt att $\left|\int_{\mathbb{T}} g(t)dt\right| \leq \int_{\mathbb{T}} |g(t)|dt$ samt att $\int_{\mathbb{T}} g(t)h(t)dt \leq \sup|h(t)| \int_{\mathbb{T}} g(t)dt$ för $g(t) \geq 0$.

Ekvation (16) och likheten (17) är en ordinär differentialekvation för varje fixt ω. Genom att lösa differentialekvationen så får vi

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} t}.$$

Om vi gör en inverstransformation av båda led och använder faltningsformeln så får viföljande lösningsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} f * K_t(x)$$

där

$$K_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} t} d\omega.$$

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt$
2. $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$
4. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\omega} dt$
5. $\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$
6. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
7. Om $a(n) = \alpha^n$, $n = 0, 1, 2, ...$ så är $z-$transformen av $a(n)$ lika med $A(z) = \frac{z}{z-\alpha}$
8. Låt $\theta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & \text{om } k \leq n \end{cases}$ då är $z-$transformen av $\alpha^n \theta(n-k)$ lika med $\frac{z^{k-1}}{z-\alpha}$.
9. $\int x^2 \cos(x) dx = -2\sin(x) + 2x\cos(x) + x^2 \sin(x)$.