TENTAMEN, CM1000:TEN1 – DISKRET MATEMATIK, JANUARI 2020 – LÖSNINGAR

Del I.

1. *Logik.* I kursen har vi studerat olika slutledningsregler och de grundläggande har kallats *modus ponens*, *modus tollens*, *disjunktiv syllogism*, *hypotetisk syllogism* och *dilemma*. Till detta kommer härledningsstragegier och enkla omskrivningsregler. Men det finns flera slutledningsregler, till exempel kallas nedanstående regel *destruktivt dilemma*. Bevisa att denna slutledningsregel är giltig, antingen utgående från de grundläggande slutledningsreglerna (på vanligt sätt i flera led med angivande av vilka slutledningsregler och premisser som resonemangen baseras på) eller med sanningstabell:

1. $p \to r$
2. $q \to s$
3. $\neg r \lor \neg s$

$\therefore \quad \neg p \lor \neg q$

Lösning: Vi ger en härledning av slutsatsen utgående från de tre givna premisserna:

4.	$\neg r \to \neg p$	Omskrivning av 1 (*kontraposition.*)
5.	$\neg s \to \neg q$	Omskrivning av 2 (*kontraposition.*)
6.	$\neg r$	antagande för bevis genom falluppdelning, fall 1.
7.	$\neg p$	4, 6, *modus ponens* (och 6)
8.	$\neg p \lor \neg q$	7 (och 6)
9.	$\neg s$	antagande för bevis genom falluppdelning, fall 2.
10.	$\neg q$	9, 5, *modus ponens* (och 9)
11.	$\neg q \lor \neg p$	10 (och 9)
12.	$\neg p \lor \neg q$	6-11 och bevis genom falluppdelning. (8 och 11 är ekvivalenta.)

2. *Mängdlära.* Låt A, B, C, D vara mängder. Om vi ställer kraven $A \subset C$, $B \subset D$ och $C \cup D = \emptyset$ på dessa fyra mängder, måste vi då alltid ha $A = B$? Om detta gäller, bevisa detta, om det inte gäller, ge exempel på fyra mängder som uppfyller de givna kraven men där $A \neq B$.

Lösning: Svaret är JA och vi kan till och med visa att både A och B måste vara tomma (och därmed har vi $A = B = \emptyset$) på följande sätt: Antag att det finns ett element i mängden A. Då har vi $x \in A \Rightarrow x \in C$ (eftersom $A \subset C$) vilket ger $C \neq \emptyset$ som ger $C \cup D \neq \emptyset$ vilket motsäger $C \cup D = \emptyset$, alltså måste $A = \emptyset$. På exakt samma sätt visas att $B = \emptyset$. (*Anmärkning: denna uppgift berör mängdlära men har liknande logiska struktur som den föregående uppgiften, men inte exakt samma*)

3. *Funktioner.* Låt mängderna $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ respektive $C = \{x, y, z\}$ vara givna. Bilda funktionerna $f = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$ och $g = \{(1, y), (2, x), (3, z), (4, z)\}$. Ange vilka egenskaper funktionerna f, g respektive $g \circ f$ har av injektivitet, surjektivitet och bijektivitet. Du behöver *inte* ge motivationer men du måste för *alla* dessa tre funktioner ange *precis* vilka egenskaper de har. Svara genom att sätta kryss i rätt rutor i svarsformuläret nedan (kryss = du svarar att funktionen *har* den aktuella egenskapen, inte kryss = du svarar att funktionen *inte har* den aktuella egenskapen).

Lösning: Eftersom $|A| = 3$ och $|B| = 4$ kan inte $f : A \to B$ vara surjektiv ($|A| = 3 < 4 = |B|$), vidare är f injektiv eftersom den antar alla värden (1, 2, 3) högst en gång. Eftersom $|B| = 4$ och $|C| = 3$ kan inte $g : B \to C$ vara injektiv ($|B| = 4 > 3 = |C|$), vidare är g surjektiv eftersom den antar alla värden (x, y, z) minst en gång. Eftersom båda funktionerna f och g saknar någon av egenskaperna injektivitet eller surjektivitet kan ingen av dem vara bijektiv. Till slut definieras sammansättningen $g \circ f : A \to C$ av

$$g \circ f = \{(a, g(f(a))), (b, g(f(b)), (c, g(f(c)))\} = \{(a, g(2)), (b, g(1)), (c, g(3))\} = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$$

och eftersom värdemängden av denna funktion är lika med $\{x, y, z\} = C$ är den surjektiv och eftersom varje element (x,y,z) antas högst (precis) en gång är den injektiv och eftersom den både är injektiv och surjektiv är den bijektiv. Alltså får vi följande svarstabell:

Funktion	Injektiv	Surjektiv	Bijektiv
f	☒	☐	☐
g	☐	☒	☐
$g \circ f$	☒	☒	☒

4. *Inledande talteori.* Använd Euklides utvidgade algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 21 modulo 23 och använd den för att finna alla heltal x som uppfyller kongruensen

$$21x \equiv 5 \pmod{23}.$$

Alla tal i ditt svar ska vara reducerade modulo 23.

Lösning: Euklides utvidgade algoritm ger, med upprepade divisioner

$$23 = 1 \cdot 21 + 2, \quad 21 = 10 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 21 - 10 \cdot 2 = 21 - 10 \cdot (23 - 1 \cdot 21) \Rightarrow 1 = 11 \cdot 21 - 10 \cdot 23,$$

så att vi får $11 \cdot 21 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 23)$ vilket betyder att den multiplikativa inversen till 21 modulo 23 är **11**. Detta ger i sin tur

$$21x \equiv 5 \pmod{23} \Leftrightarrow 11 \cdot 21x \equiv 11 \cdot 5 \pmod{23} \Leftrightarrow 1 \cdot x \equiv 55 \pmod{23} \Leftrightarrow x \equiv 9 \pmod{23}$$

så svaret är $x \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 23)$.

5. *Relationer.* Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \text{ är ett jämnt tal.}$$

Ge en utredning av vilka egenskaper denna relation har av *reflexivitet*, *symmetri*, *antisymmetri* (vi bortser från *transitivitet*). Alltså, för dessa tre egenskaper: Om relationen har egenskapen, bevisa det, om relationen inte har egenskapen, bevisa att den inte har egenskapen.

Lösning: Vi studerar kraven för de olika egenskaperna var för sig.

Reflexivitet: För att en relation ska vara reflexiv ska den uppfylla $x\mathcal{R}x$ för alla x i sin domän. Men detta gäller klart eftersom

$$x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x^2 + x^2 \text{ är ett jämnt tal} \Leftrightarrow 2x^2 \text{ är ett jämnt tal}$$

gäller för alla $x \in \mathbb{Z}$. Relationen är alltså reflexiv.

Symmetri: För att en relation ska vara symmetrisk ska den uppfylla $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$ för alla x, y i sin domän. Men detta gäller klart eftersom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \text{ är ett jämnt tal} \Leftrightarrow y^2 + x^2 \text{ är ett jämnt tal} \Leftrightarrow y\mathcal{R}x,$$

talen $x^2 + y^2$ och $x^2 + y^2$ är ju samma för alla $x, y \in \mathbb{Z}$. Relationen är alltså symmetrisk.

Antisymmetri: Relationen är dock inte antisymmetrisk och det visar vi genom att visa motsatsen till $\forall x, y : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ som visas genom att ta ett exempel på heltal x, y som inte uppfyller $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$, det vill säga två tal x, y som har $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \wedge x \neq y$. Vi kan till exempel ta $x = 3 \neq 1 = y$ och konstatera att $x^2 + y^2 = 3^3 + 1^2 = 10$ som är jämnt, dvs $x\mathcal{R}y$, respektive $y^2 + x^2 = 10$ som också är jämnt (det är ju samma tal som $x^2 + y^2$), dvs $y\mathcal{R}x$ men som förut betonat har vi också $x \neq y$ vilket visar att relationen *inte* är antisymmetrisk.

(Man kan också visa att relationen är transitiv, men det ingick inte i uppgiften.)

6. *Fördjupad talteori.* Visa med hjälp av matematisk induktion att för alla heltal $n \geq 1$ gäller

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Lösning: Induktion över n. Inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \Leftrightarrow VL_n = HL_n$ för alla heltal $n \geq 1$. Visa nu $\forall n \geq 1 : A(n)$.

Steg 1. Kontrollera att $A(1)$ är sann. Det är $\Leftrightarrow VL_1 = HL_1$ så vi kontrollerar detta:

$$VL_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} \text{ respektive } HL_1 = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

och eftersom uppenbarligen $VL_1 = HL_1$ så måste $A(1)$ vara sann, detta fullbordar första steget.

Steg 2. Låt nu $p \geq 1$ vara ett godtyckligt heltal och visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann.

(a) Gör induktionsantagandet, antag alltså att $A(p)$ gäller för ett visst p, det vill säga att $VL_p = HL_p$. Då har vi alltså

$$VL_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{p}{2p+1} = HL_p.$$

Med stöd av detta ska vi nu visa $A(p+1)$ det vill säga att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ gäller. Vi arbetar nu därför med VL_{p+1}:

(b) $VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{1}{(2(p+1)-1)\cdot(2(p+1)+1)}$. Som vanligt, med hjälp av induktionsantagandet, ersätter vi summan $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}$ som är lika med VL_p med $HL_p = \frac{p}{2p+1}$ (det gå tack vare induktionsantagandet) och det resulterande uttrycket för VL_{p+1} blir då

$$\frac{p}{2p+1} + \frac{1}{(2(p+1)-1)\cdot(2(p+1)+1)} = \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{(2p+1)\cdot(2p+3)}$$

och detta kan skrivas som

$$\frac{1}{2p+1}\cdot\left(p + \frac{1}{2p+3}\right) = \frac{1}{2p+1}\cdot\left(\frac{p(2p+3)}{2p+3} + \frac{1}{2p+3}\right) = \frac{2p^2+3p+1}{(2p+3)\cdot(2p+1)}.$$

Detta uttryck ska nu visas vara samma som HL_{p+1} så vi sätter upp HL_{p+1} och får

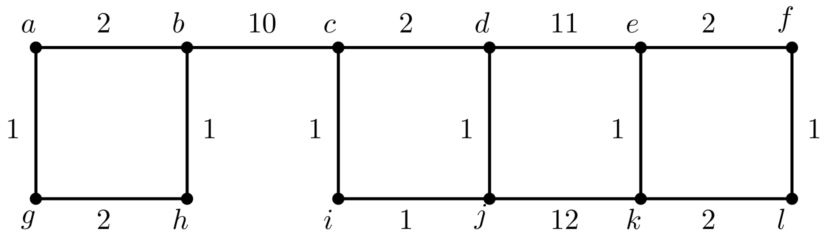
$$HL_{p+1} = \frac{p+1}{2(p+1)+1} = \frac{p+1}{2p+3} = \frac{(p+1)(2p+1)}{(2p+3)(2p+1)} = \frac{2p^2+3p+1}{(2p+3)(2p+1)}$$

vilket klart är lika med VL_{p+1}. (Vi förlängde med $(2p+1)$ för att lättare se att uttrycken var lika.)

(c) Slutsatsen vi drar av allt detta är att $VL_p = HL_p$ (induktionsantagandet) alltså ger oss $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ det vill säga implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för godtyckliga heltal $p \geq 1$. Detta fullbordar det andra steget i induktionsbeviset.

Steg 3: Steg 1 och steg 2 tillsammans med induktionsaxiomet (också kallad principen för matematisk induktion) fullbordar beviset.

7. *Grafteori.* Finn alla minimala uppspännade träd till nedanstående graf. Ange också deras totala vikter. Inga motiveringar behövs, du behöver dock tydligt ange alla möjliga minimala uppspännande träd. (Och deras totala vikter.)



Lösning: För att säkert hitta alla minimala uppspännande träd kan vi tänka så här: det är uppenbart att alla kanter med vikt 1 ska vara med i trädet eftersom om vi tar med alla dem så uppstår inga cykler. Det är vidare uppenbart att kanten med vikt 10 måste vara med eftersom vi annars inte får ett träd. På samma sätt inser vi att någon av kanterna med vikt 11 och 12 måste vara med, och eftersom trädet ska vara minimalt måste det bli kanten med vikt 11. Det är alltså klart att alla dessa kanter,

$$ag, bh, ci, ij, dj, ek, fl, bc, de,$$

måste vara med. Dessa kanter har totalt vikten 28. Till sist måste antingen precis en av kanterna med vikt 2 till vänster i grafen vara med (ab eller gh) och samtidigt måste precis en av kanterna med vikt 2 till höger i grafen vara med (ef eller kl). Vi har 2 valmöjligheter till vänster och 2 till höger som är oberoende av varandra. Totalt ger det, enligt multiplikationsprincipen upphov till $2 \cdot 2 = 4$ olika minimala uppspännande träd, dessa träd kan anges fullständigt genom att ange de kombinationer av kanterna ef eller kl respektive ab eller gh som ska tas med tillsammans med de tidigare nämnda kanterna. Eftersom vi ska ha 2 kanter till med vikt 2 så får alla slutliga minimala uppspännade träd vikten $28 + 4 = 32$.

8. *Kombinatorik.* Använd principen om inklusion och exklusion för att finna antal tal i mängden

$$\{1, 2, \ldots, 10000\}$$

som är delbara med 3 eller 10 (eller bådadera).

Lösning: För att uttrycka oss mer kompakt inför vi namnet M på mängden $\{1, 2, \ldots, 10000\}$ och sedan inför vi mängderna

$$A = \{x \in M : 3|x\} \quad \text{och} \quad B = \{x \in M : 10|x\}$$

och konstaterar att det sökta antalet tal är $|A \cup B|$. Detta tal kan beräknas med principen för inklusion och exklusion genom formeln

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

och vi söker nu talen $|A|$, $|B|$ och $|A \cap B|$. Vi kan skriva

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots, 3 \cdot 3333\} \quad (= \textit{alla multiplar av 3 i } M)$$

där vi funnit att sista talet i A är $3 \cdot 3333$ genom att utföra heltalsdivisionen $10000/3$. Genom att direkt inspektera denna framställning av A ser vi att $|A| = 3333$. På samma sätt kan vi skriva

$$B = \{10 \cdot 1, 10 \cdot 2, 10 \cdot 3, \ldots, 10 \cdot 1000\} \quad (= \textit{alla multiplar av 10 i } M)$$

där återigen, den sista multipeln fås genom en heltalsdivision, här $10000/10$ som den här gången går jämnt ut och ger 1000. På samma sätt som ovan kan vi läsa av, direkt från framställningen, att $|B| = 1000$.

Eftersom talen 3 och 10 är relativt prima har vi $3|x \wedge 10|x \Leftrightarrow 10 \cdot 3|x$ och det innebär att

$$A \cap B = \{x \in M : x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in M : 3|x \wedge 10|x\} = \{x \in M : 3 \cdot 10|x\}$$

som alltså blir alla multiplar av $3 \cdot 10 = 30$ i M. Denna mängd behandlar vi på samma sätt och får

$$M = \{30 \cdot 1, 30 \cdot 2, 30 \cdot 3, \ldots, 30 \cdot 333\}$$

vilket ger $|A \cap B| = 333$. Sammantaget får vi

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3333 + 1000 - 333 = 4000$$

som blir det slutliga svaret.

9. *Sannolikhetslära.* Låt S vara ett utfallsrum med händelserna A, B, C och låt följande vara givet:

$$P(A) = 0.3, \quad P(A \cup C) = 0.6, \quad P(A \cup B) = 0.44, \quad P(B|A) = 0.2, \quad P(A|C) = 0.1.$$

Visa att händelserna A och B är oberoende och att händelserna A och C *inte* är oberoende.

Lösning: Kravet på att två händelser A, B ska vara oberoende är att $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, det är alltså detta vi ska visa. Vi arbetar då med $P(A) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.44$ och $P(B|A) = 0.2$ för att räkna ut vad $P(B)$ respektive $P(A \cap B)$ verkligen är. Vi börjar med att konstatera att följande likheter gäller

$$0.2 = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

så att vi får $P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A)$. Detta sätter vi sedan in i likheten

$$0.44 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

för att få ekvationen

$$0.44 = P(A) + P(B) - 0.2 \cdot P(A) \Leftrightarrow 0.44 = 0.8 \cdot P(A) + P(B)$$

och med värdet $P(A) = 0.3$ insatt ger detta $0.44 = 0.8 \cdot 0.3 + P(B) \Leftrightarrow 0.44 = 0.24 + P(B)$ vilket ger $P(B) = 0.2$. Vi kan också använda likheten $0.44 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ igen för att beräkna $P(A \cap B)$ genom

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.3 - 0.44 = 0.06$$

och nu ser vi att

$$P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 = P(A \cap B)$$

vilket precis innebär att händelserna A, B är oberoende.

Kravet på att två händelser A, C *inte* ska vara oberoende är då att vi *inte* ska ha likheten $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ vilket vi nu ska visa gäller. På likande sätt som ovan tar vi fram värdena på $P(C)$ respektive $P(A \cap C)$. Från $(A \cup C) = 0.6$ och $P(A|C) = 0.1$ får vi (på liknande sätt som ovan)

$$0.1 = P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \Leftrightarrow 0.1 \cdot P(C) = P(A \cap C)$$

och detta insatt i ekvationen

$$0.6 = P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

ger oss $0.6 = 0.3 + 0.9 \cdot P(C) \Leftrightarrow 0.3 = 0.9 \cdot P(C) \Leftrightarrow P(C) = 1/3$. På samma sätt som ovan (men med andra siffror) har vi också

$$P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0.3 + 1/3 - 0.6 = 0.03333\ldots$$

och eftersom $P(A) = 0.3$ och $P(C) = 1/3$ får vi $P(A) \cdot P(C) = 0.1$ som alltså *inte* har samma värde som $P(A \cap C) = 0.03333\ldots$ varför vi visat att A, C *inte* är oberoende.

Del II.

10. *Kan täcka delområde 4 – Inledande talteori.* Visa att, för alla heltal $n \geq 0$ gäller $n!|(2n) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1)$. (*Ledning: studera binomialkoefficienten* $\binom{2n}{n}$.)

Lösning: Vi ska visa ett delbarhetsförhållande. Vi antar att binomialkoefficienten $\binom{2n}{n}$ har värdet k (som då blir ett positivt heltal). Då gäller

$$\binom{2n}{n} = k \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{n! \cdot (2n-n)!} = k \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = k.$$

Men talet $(2n)!$ är ingenting annat än produkten $2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots (n+1) \cdot n!$ varför vi kan skriva ovanstående ekvation som

$$\frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n!}{n! \cdot n!} = k$$

och efter förkortning med $n!$ ger detta ekvationen

$$\frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1)}{n!} = k \quad (= \textit{heltal})$$

vilket är ett annat sätt att säga att $n!|(2n) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1)$ så beviset är klart.

11. *Kan täcka delområde 7 – grafteori.* Om ett träd har tre löv, visa att det måste ha minst ett hörn av minst grad 3.

Lösning: Antag, för att finna en motsägelse, att vi har ett träd där alla hörn har högst gradtal 2 men att det ändå finns 3 löv. Kalla dessa tre löv för a, b och c. Löven a, b och c är då 3 hörn i trädet med gradtal 1 (det är bara vad det betyder att ett löv är). Eftersom grafen är ett träd är den sammanhängande så det finns en väg från a till b men även från a till c. Kalla vägen från a till b för V och vägen från a till c för W. Då har vi

$$V = av_1v_2\ldots v_nb \qquad \text{respektive} \qquad W = aw_1w_2\ldots w_mc$$

där $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är en uppräkning av hörnen som ligger mellan a och b i vägen V och $w_1, w_2, \ldots, w_m$ är en uppräkning av hörnen som ligger mellan a och c i vägen W.

Eftersom a är ett löv så måste $v_1 = w_1$, annars skulle inte a vara ett löv. Men eftersom alla hörn i grafen har gradtal ≤ 2 måste av samma strukturella skäl även $v_2 = w_2$ för annars skulle $v_1 (= w_1)$ få gradtal ≥ 3. På samma sätt inses att

$$v_3 = w_3, v_4 = w_4 \quad \ldots$$

så i själva verket kan inte vägarna V och W vara skilda åt, det innebär att de även måste ha samma slutdestination, dvs $b = c$ vilket är en motsägelse eftersom löven a, b, c skulle vara tre olika hörn. Antagandet om att alla hörn i trädet har gradtal ≤ 2 måste alltså vara falskt det vill säga det måste existera ett hörn i trädet med gradtal ≥ 3 vilket skulle bevisas. (Det hörnet blir då en förgreningspunkt som sammanbinder vägar som förbinder samtliga tre hörn a, b, c i trädet.)

Del III.

12. *Kan täcka delområde 5 – relationer.* Låt mängden $U = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$ vara given. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_8$ genom $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in U$. Ge en fullständig utredning av vilka egenskaper denna relation har (reflexivitet, symmetri, anti-symmetri respektive transitivitet). Alltså, för alla dessa egenskaper: Om relationen har egenskapen, bevisa det, om relationen inte har egenskapen, bevisa att den inte har den egenskapen.

Lösning: Vi studerar en relation på $\mathbb{Z}_8$ (inte $\mathbb{Z}$ som vi kanske är vana vid). Vi kan dock, i uppgiften, representera elementen som relaterar till varandra med notationen $\bar{x}$ där x får vara olika heltal. I dessa representationer räcker det med att låta x anta värdena $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ eftersom vi arbetar i $\mathbb{Z}_8$.

Vi ska undersöka om relationen har egenskaperna *reflexivitet*, *symmetri*, *antisymmetri* respektive *transitivitet*.

reflexivitet: Har vi, för alla $\bar{x} \in \mathbb{Z}_8$ $\bar{x}\mathcal{R}\bar{x}$? Ja, eftersom $\bar{x}\mathcal{R}\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} - \bar{x} \in U \Leftrightarrow \overline{x - x} = \bar{0} \in U$ och vi har verkligen $\bar{0} \in U$.

symmetri: Har vi, för alla $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_8$ $\bar{x}\mathcal{R}\bar{y} \Leftrightarrow \bar{y}\mathcal{R}\bar{x}$? Ja eftersom

$$\bar{x}\mathcal{R}\bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} - \bar{y} \in U \Leftrightarrow \overline{x - y} \in U$$

och i $\mathbb{Z}_8$ gäller $\pm\bar{0} = \bar{0}$, $-\bar{2} = \bar{6}$, $-\bar{4} = \bar{4}$ respektive $-\bar{6} = \bar{2}$, så eftersom $\overline{x - y} = -\overline{y - x}$ har vi

$$\overline{x - y} \in U \Leftrightarrow \overline{x - y} = \bar{0} \vee \overline{x - y} = \bar{2} \vee \overline{x - y} = \bar{4} \vee \overline{x - y} = \bar{6}$$

vilket är ekvivalent med

$$-\overline{x - y} = -\bar{0} \vee -\overline{x - y} = -\bar{2} \vee -\overline{x - y} = -\bar{4} \vee -\overline{x - y} = -\bar{6}$$

vilket i sin tur är ekvivalent med

$$\overline{y - x} = -\bar{0} \vee \overline{y - x} = -\bar{2} \vee \overline{y - x} = -\bar{4} \vee \overline{y - x} = -\bar{6}$$

som då är ekvivalent med

$$\overline{y - x} = \bar{0} \vee \overline{y - x} = \bar{6} \vee \overline{y - x} = \bar{4} \vee \overline{y - x} = \bar{2}$$

som slutligen blir precis $\overline{y - x} \in U \Leftrightarrow \bar{y}\mathcal{R}\bar{x}$ vilket visar att relationen är symmetrisk.

antisymmetri: Gäller implikationen $\bar{x}\mathcal{R}\bar{y} \wedge \bar{y}\mathcal{R}\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ för alla $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_8$? Nej, vi kan till exempel välja $x = 0$ och $y = 2$, då har vi

$$\bar{0} - \bar{2} = \overline{-2} = \bar{6} \in U \text{ (så } \bar{0}\mathcal{R}\bar{2}) \quad \text{och} \quad \bar{2} - \bar{0} = \bar{2} \in U \text{ (så } \bar{2}\mathcal{R}\bar{0})$$

men i $\mathbb{Z}_8$ gäller $\bar{0} \neq \bar{2}$ så relationen är *inte* antisymmetrisk.

transitivitet: För godtyckliga $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_8$ gäller nu $\bar{x}\mathcal{R}\bar{y} \wedge \bar{y}\mathcal{R}\bar{z} \Rightarrow \bar{x}\mathcal{R}\bar{z}$? Svaret är JA och det följer av att mängden U har en speciell egenskap och det är att den är vad vi kallar *sluten under addition*: för alla element $u, v \in U$ gäller $u + v \in U$. (Detta kan inses genom att bilda alla summor $u + v$ av $u, v \in U$ och bara kontrollera att så är fallet:

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \in U, \quad \bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \in U, \quad \bar{0} + \bar{4} = \bar{4} \in U, \quad \bar{0} + \bar{6} = \bar{6} \in U,$$

$$\bar{2} + \bar{0} = \bar{2} \in U, \quad \bar{2} + \bar{2} = \bar{4} \in U, \quad \bar{2} + \bar{4} = \bar{6} \in U, \quad \bar{2} + \bar{6} = \bar{0} \in U, \quad \text{och så vidare.}$$

Om vi nu då antar att $\bar{x}\mathcal{R}\bar{y} \wedge \bar{y}\mathcal{R}\bar{z}$ så har vi $\overline{x - y} \in U$ och $\overline{y - z} \in U$ vilket ger

$$\overline{x - z} = \overline{x - y} + \overline{y - z} \in U$$

enligt utredningen ovan. Men $\overline{x - z} \in U$ betyder precis $\bar{x}\mathcal{R}\bar{z}$ vilket visar transitiviteten.

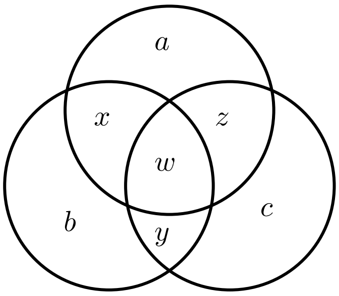
13. *Kan täcka delområde 9 – sannolikhetslära.* Du ska konstruera ett ett utfallsrum med tre händelser, A, B, C med följande egenskaper:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \quad \text{och} \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),$$

men

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Vi ska alltså ha en situation där händelserna A, B är oberoende, A, C är oberoende och B, C är oberoende men där inte A, B, C är oberoende. Ange utfallsrummet genom att ge värden på talen a, b, c, x, y, z, w där $P(A - (B \cup C)) = a$, $P(B - (A \cup C)) = b$, $P(C - (A \cup B)) = c$, $P((A \cap B) - C) = x$, $P((B \cup C) - A) = y$, $P((A \cup C) - B) = z$ och $P(A \cap B \cap C) = w$. Detta kan också illustreras i följande Venndiagram:



Uppgiften består alltså i att välja värden på a, b, c, x, y, z, w på ett intelligent sätt. *(Ledning: Du kan börja med att välja $w = 0$ och sedan kan du utgå från att $a = b = c$ respektive $x = y = z$.)*

Lösning: Vi utgår från att $w = 0$ samt att respektive $a = b = c$ respektive $x = y = z$. Då gäller

$P(A) = a + 2x$
$P(A \cap B) = x$
$P(B) = a + 2x$
$P(B \cap C) = x$
$P(C) = c + 2x$
$P(C \cap A) = x$

Kraven i problemställningen är uppfyllda om vi kan hitta x och a som uppfyller

$$(a + 2x) \cdot (a + 2x) = x$$

som också ger upphov till ett utfallsrum, vilket gäller om $a + x + a + x + a + x \leq 1$.

Problemställningen är egentligen enkel, vi ska bara *välja* x och a som fungerar, vi kan därför välja lösningar till ekvationen

$$(a + 2x) \cdot (a + 2x) = x \Leftrightarrow (a + 2x)^2 = x$$

genom att först och främst bara ansätta $x = 0.04$. Det gör vi för att 0.04 är en jämn kvadrat (i termer av rationella tal: $0.04 = 0.2^2$). Nästa steg är att finna a sådant att

$$(a + 2 \cdot 0.04)^2 = 0.04 \Leftrightarrow a + 0.08 = \pm 0.2$$

För att vi ska få ett utfallsrum måste vi utesluta den negativa lösningen så att vi alltså får $a = 0.2 - 0.08 = 0.12$. Sammantaget resulterar detta i sannolikhetstilldelningarna

$$P(A) = P(B) = P(C) = a + 2x = 0.12 + 2 \cdot 0.04 = 0.12 + 0.08 = 0.2$$

respektive

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0.04$$

och dessa tilldelningar uppfyller klart

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) (= 0.04), \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) (= 0.04) \quad \text{och} \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) (= 0.04),$$

men

$$(0 =) \quad P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \quad (= 0.008)$$

samtidigt som också valet av dessa värden ger upphov till ett utfallsrum eftersom olikheten $3(a + x) \leq 1$ är uppfylld (eftersom $3 \cdot 0.24 \leq 1$).