Föreläsning 14, del e (demonstration testuppgifter)

5.2

a) Lös Malthus diffekvation $P'(t) = rP(t)$ med begynnelsevillkoret $P(0) = P_0$ där r och P_0 är konstanter, och bestäm $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

($P(t)$: antalet individer i en population vid tiden t ($P(t) > 0$)

r : reproduktionsparameter)

Lösning: Separera!

$$P'(t) = rP(t) \iff \frac{1}{P(t)} P'(t) = r$$

inre derivata!

$$\iff \frac{d}{dt}(\ln P(t)) = r$$

Integrera!

$$\iff \ln P(t) = rt + C$$

Lös ut $P(t)$ genom att exponentiera!

$$\iff e^{\ln P(t)} = e^{(rt+C)}$$

$$\iff P(t) = e^{(rt+C)} = e^C e^{rt}$$

Vi bestämmer konstanten C med hjälp av begynnelsevillkoret:

$$P(0) = P_0 \iff e^C e^{r\cdot 0} = P_0 \iff e^C = P_0$$

Vi sätter in $e^C = P_0$ i den allmänna lösningen:

$$P(t) = e^C e^{rt} = P_0 e^{rt}$$

Svar: $P(t) = P_0 e^{rt}$ $\to \infty$ då $t \to \infty$

b) Lös den logistiska diffekvationen

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right), \quad P(0) = P_0$$

där r, P_0 och K (det maximala antalet individer) är konstanter, och bestäm $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

Lösning:

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

$$\iff P'(t) = rP(t)\,\frac{K - P(t)}{K}$$

$$\iff \frac{1}{P(t)(K - P(t))} P'(t) = \frac{r}{K}$$

Partialbråksuppdela bråket i vänsterledet!

Ansatz: $\dfrac{1}{P(K-P)} = \dfrac{A}{P} + \dfrac{B}{K-P}$

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{K-P} = \frac{A(K-P) + BP}{P(K-P)} = \frac{AK - AP + BP}{P(K-P)} =$$

$$= \frac{AK + (B-A)P}{P(K-P)} \qquad \begin{cases} AK = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \iff A = B = \frac{1}{K}$$

Alltså: $\dfrac{1}{P(K-P)} = \dfrac{1/K}{P} + \dfrac{1/K}{K-P} = \dfrac{1}{K}\left(\dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{K-P}\right)$

$\rightarrow$