Föreläsning 7, del e (demonstration testuppgifter)

2.8 d Bestäm en primitiv funktion till

$\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ (med hjälp av lämplig substitution)!

Lösning: Testa $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2}(x^{1/2})^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}} = \frac{1}{u^2+u} = \frac{1}{u(u+1)} =$$

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u+1} = 2 \frac{1}{2u} \frac{1}{u+1} = 2 \frac{du}{dx} \frac{1}{u+1}$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int 2 \frac{du}{dx} \frac{1}{u+1} dx = 2 \int \frac{1}{u+1} du =$$

$$= 2 \ln|u+1| + C = 2 \ln|\sqrt{x}+1| + C$$

Det räckte med en primitiv funktion, så vi behöver inte ha med C i svaret, och inte heller beloppstecknet.

Svar: $2 \ln(\sqrt{x}+1)$

2.9 a Bestäm med hjälp av lämplig trigonometrisk substitution

$\int (\sin x)(\cos x)\, dx$!

Lösning: Sätt $u = \sin x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\int (\sin x)(\cos x)\, dx = \int u \frac{du}{dx} dx = \int u\, du =$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C$$

Alternativ lösning:

Använd formeln för sinus av dubbla vinkeln!

$$\int (\sin x)(\cos x)\, dx = \frac{1}{2} \int 2(\sin x)(\cos x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(2x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-\cos(2x)) + K =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos(2x) + K =$$

(formeln för cosinus av dubbla vinkeln!)

$$= -\frac{1}{4}(1 - 2(\sin x)^2) + K = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + K - \frac{1}{4}$$

Samma som ovan om vi sätter $K - \frac{1}{4} = C$!

Svar: $\frac{1}{2}(\sin x)^2 + C$.