Föreläsning 11, del e

Sats Låt f vara kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$ och låt $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av Riemannsummor till f, där varje Riemannsumma R_n svarar mot en indelning av $[a,b]$ i delintervall. Låt $d(R_n)$ vara längden av det längsta delintervallet och anta att $d(R_n) \to 0$ då $n \to \infty$.

(Vi har alltså en följd av indelningar som blir allt finare då n ökar.)

Då gäller: $\lim_{n\to\infty} R_n = \int_a^b f(x)\,dx$

Ex Beräkna $\int_0^1 x\,dx$!

Undersumman $\int_0^1 u(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

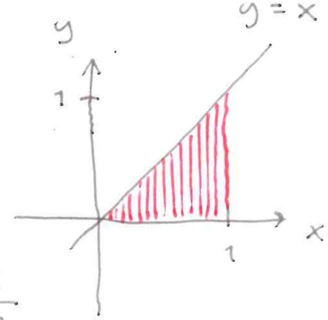
där $u(x) = \frac{k-1}{n}$ då $\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n}$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$ (se förra exemplet!)

är en Riemannsumma R_n för varje $n = 1, 2, 3, \ldots$ och indelningarna blir allt finare då n ökar: $d(R_n) = \frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$. →

Enligt satsen har vi då

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$



Exemplet kan lätt generaliseras.

Man får då

$$\int_a^b (kx+m)\,dx = \frac{k}{2}(b^2-a^2) + m(b-a)$$

vilket stämmer överens med halva arean av rektangeln nedan:

$$\frac{1}{2}\big((ka+m)+(kb+m)\big)(b-a) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(k(a+b)+2m\big)(b-a) =$$
$$= \frac{k}{2}(b+a)(b-a) + \frac{2m}{2}(b-a) =$$
$$= \frac{k}{2}(b^2-a^2) + m(b-a)$$