Föreläsning 9, del a

Förra gången lärde vi oss att integrera alla rationella funktioner $\frac{T(x)}{N(x)}$ där $T(x)$ är vilket polynom som helst, och $N(x)$ vilket förstagradspolynom som helst, eller ett andragradspolynom av formen

$$N(x) = x^2 + q$$

där q är positivt eller negativt ($q = \alpha$ eller $q = -\alpha$, där $\alpha > 0$) eller noll.

- Om grad $T(x) \geq$ grad $N(x)$ så behövde vi först utföra polynomdivision.

- Om $q \geq 0$ så kunde vi använda standardintegralerna

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

tillsammans med allmänna integrationsregler för att integrera $T(x)/N(x)$.

- Om $q < 0$ behövde vi faktorisera polynomet $N(x) = x^2 + q = x^2 - \alpha$:

$$x^2 - \alpha = (x + \sqrt{\alpha})(x - \sqrt{\alpha})$$

Faktoriseringen ledde till att vi kunde skriva den ursprungliga rationella funktionen $T(x)/N(x)$, där $N(x)$ är ett andragradspolynom, som en summa av rationella funktioner där nämnaren är ett förstagradspolynom. Och sådana rationella funktioner är lätta att integrera!

Ex Beräkna $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$!

Vi faktoriserar nämnaren: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ och betraktar

$$\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = 2\,\frac{1}{x^2-1}.$$

Vi får:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + C$$

Föreläsning 9, del b

Partialbråksuppdelning: omskrivning av en rationell funktion $T(x)/N(x)$, där grad $T(x)$ < grad $N(x)$, som en summa av rationella funktioner $t(x)/n(x)$, där grad $t(x)$ < grad $n(x)$, och $n(x)$ är en faktor i $N(x)$. En sådan omskrivning är alltid möjlig!

Med hjälp av partialbråksuppdelning kan vi integrera rationella funktioner $T(x)/N(x)$ där nämnaren $N(x)$ är ett polynom av högre grad än 2!

Ex) Beräkna $\int \frac{3x^2+4}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$!

grad $(3x^2+4) = 2$

grad $(x^3+2x^2-x-2) = 3$

$2 < 3 \Rightarrow$ ingen polynomdivision behövs!

Vi faktoriserar $N(x) = x^3+2x^2-x-2$:

→

Vi prövar oss fram till $N(1) = N(-1) = N(-2) = 0$, så enligt algebrans fundamentalsats:

$$N(x) = (x-1)(x-(-1))(x-(-2)) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

(det hade räckt med att hitta ett nollställe, sedan kan man utföra polynomdivision för att hitta de andra två faktorerna, enligt faktorsatsen)

Vi vill alltså skriva

$$\frac{3x^2+4}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{T(x)}{N(x)} = \frac{t_1(x)}{n_1(x)} + \frac{t_2(x)}{n_2(x)} + \frac{t_3(x)}{n_3(x)}$$

där $n_1(x) = x-1$, $n_2(x) = x+1$, $n_3(x) = x+2$.

Men hur bestämmer vi $t_1(x)$, $t_2(x)$, $t_3(x)$?

Eftersom polynomet i täljaren måste ha lägre grad än polynomet i nämnaren, måste $t_1(x)$, $t_2(x)$, $t_3(x)$ ha grad noll, alltså vara konstanter. Vi ansätter

$t_1(x) = A$, $t_2(x) = B$, $t_3(x) = C$

och ser vad vi får!

→

Föreläsning 9, del c

→ **Ex** ∫ (forts.) Vi gör alltså en Ansatz:

$$\frac{3x^2+4}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \quad (=)$$

där vi vill bestämma konstanterna A, B, C.

$$HL = \frac{A(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)} + \frac{B(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)} + \frac{C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} =$$

$$= \frac{A(x^2+3x+2)+B(x^2+x-2)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C)}{x^3+2x^2-x-2}.$$

När vi jämför med VL och tar x^2-termer, x-termer och konstanta termer för sig så får vi ett ekvationssystem

$$\begin{cases} A+B+C = 3 & (x^2\text{-termer}) \\ 3A+B = 0 & (x\text{-termer}) \\ 2A-2B-C = 4 & (\text{konstanta termer}) \end{cases}$$

Efter lite räkning får vi lösningen

$$\begin{cases} A = 7/6 \\ B = -7/2 \\ C = 16/3 \end{cases}$$

Vi sätter in den i Ansatzen:

$$(=) \quad \frac{7/6}{x-1} + \frac{-7/2}{x+1} + \frac{16/3}{x+2}$$ och vi får

$$\int \frac{3x^2+4}{x^3+2x^2-x-2}\,dx =$$

$$= \frac{7}{6}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{16}{3}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{7}{6}\ln|x-1| - \frac{7}{2}\ln|x+1| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + C$$

(Puh...)

Föreläsning 9, del d

Sats Varje reellt polynom (som inte är 0) kan skrivas som en produkt av reella första- och andragradspolynom.

Ex Polynomet $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$ kan faktoriseras (skrivas som en produkt)

$$p(x) = (x-2)(x+3)(x^2+1)$$

förstagradspolynom som talar om att $p(x)$ har nollställen 2 och -3, alltså $p(2) = p(-3) = 0$

andragradspolynom som saknar nollställen, och därmed inte kan skrivas som en produkt av två reella förstagradspolynom (irreducibelt)

När man ska partialbråksuppdela $\frac{T(x)}{N(x)}$ där grad $T(x)$ < grad $N(x)$ faktoriserar man först $N(x)$ så långt som möjligt, till en produkt av första- och andragradspolynom.

Sedan gör vi en Ansatz där vi

- för varje faktor $(x-a)^n$ i $N(x)$ lägger till termer

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

- för varje faktor $(x^2+px+q)^m$ i $N(x)$ (som inte kan faktoriseras till en produkt av förstagradspolynom) lägger till termer

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2+px+q)^m}$$

Genom att sätta allt på ett gemensamt bråkstreck får vi ett uttryck som vi kan jämföra med $T(x)/N(x)$. Detta ger ett ekvationssystem som vi kan lösa för att bestämma konstanterna A_k, B_k, C_k.

Sedan räcker det med att vi kan integrera var och en av termerna i Ansatzen. Mer om detta nästa gång!

Föreläsning 9, del e

2.12 Ange vilka ansättningar som måste göras för att kunna partialbråksuppdela följande uttryck:

e) $$\frac{6x^2+10x+18}{x^3+2x^2+9x}$$

Lösning: Sätt $T(x) = 6x^2+10x+18$ och $N(x) = x^3+2x^2+9x$.

(grad $T(x) = 2 <$ grad $N(x) = 3$
$\Rightarrow$ uttrycket kan inte förenklas genom polynomdivision!)

Faktorisera $N(x)$! Ingen konstant term $\Rightarrow$ vi kan bryta ut en faktor x:

$$N(x) = x^3+2x^2+9x = x(x^2+2x+9)$$

Kan andragradspolynomet x^2+2x+9 faktoriseras till en produkt av två förstagradspolynom? Kvadratkomplettera!
(Eller försök att lösa $x^2+2x+9=0$)

$$x^2+2x+9 = x^2+2x+1-1+9 =$$
$$= (x+2x+1)+8 = (x+1)^2+8$$

$8 > 0 \Rightarrow$ andragradspolynomet x^2+2x+9 saknar reella nollställen!
Kan ej faktoriseras! (irreducibelt)

Vi har en faktor $x = (x-0)^1$ och en faktor $(x^2+2x+9) = (x^2+2x+9)^1$. Vi ska alltså ha en term A/x och en term $\frac{Bx+C}{x^2+2x+9}$ i Ansatzen.

Svar: $$\frac{6x^2+10x+18}{x^3+2x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+9}$$

f) $$\frac{8x^3+16}{(x+1)^3(x-1)^2}$$

Lösning: Nämnaren redan faktoriserad, vi kan skriva upp Ansatzen direkt!

Svar: $$\frac{8x^3+16}{(x+1)^3(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}$$