Föreläsning 16, del a

Linjära differentialekvationer av andra ordningen (och högre) med konstanta koefficienter (5.4)

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

- homogena: $g(x) = 0$
- inhomogena där $g(x)$ är ett polynom

Kom ihåg från förra gången:

Linjär differentialekvation av första ordningen:

$$y'(x) - f(x)\,y(x) = g(x)$$

Lösningstrick: multiplicera med den integrerande faktorn $e^{-F(x)}$, där $F'(x) = f(x)$.

Linjär differentialekvation av ordning n:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)\,y' + f_0(x)\,y = g(x)$$

- homogen om $g(x) = 0$
- inhomogen om $g(x) \neq 0$

Tyvärr finns inget lika bra lösningstrick för högre ordningars differentialekvationer.

Vi begränsar oss till andra ordningens linjära differentialekvationer ($n = 2$)

$$y''(x) + f_1(x)\,y'(x) + f_0(x)\,y(x) = g(x)$$

med konstanta koefficienter ($f_1(x) = p$, $f_0(x) = q$)

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = g(x)$$

(p, q: konstanter)

Vi börjar med det homogena fallet ($g(x) = 0$):

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \iff \left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

$$\left(D^2 + pD + q\right) y(x) = 0 \iff P(D)\,y(x) = 0$$

Vi kan betrakta operatorn $P(D) = D^2 + pD + q$ som ett "polynom" i operatorn $D = \frac{d}{dx}$.

Motsvarande polynom i en variabel r kallas för det karakteristiska polynomet för differentialekvationen: $P(r) = r^2 + pr + q$

andragrads-polynom/-ekvation

Den karakteristiska ekvationen:

$$P(r) = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

Allmänt: ordningen av en linjär differentialekvation är lika med graden av motsvarande karakteristiska polynom och ekvation.

Föreläsning 16, del 6

Kom ihåg: Om ett andragradspolynom $r^2 + pr + q$ har nollställen r_1 och r_2 så kan det faktoriseras $r^2 + pr + q = (r - r_1)(r - r_2)$.

Motsvarande "polynom" $D^2 + pD + q$ i $D = \frac{d}{dx}$ kan faktoriseras på samma sätt:

$$D^2 + pD + q = (D - r_1)(D - r_2)$$

Vi kan använda detta för att härleda den allmänna lösningen till den homogena linjära differentialekvationen

$$y'' + py' + qy = 0 \iff$$

sätt: $z(x) = (D - r_2)y(x) = y'(x) - r_2 y(x)$

$$(D^2 + pD + q)y = 0 \iff$$

$$(D - r_1)(D - r_2)y = 0 \iff$$

$$(D - r_1)z = 0 \iff z' - r_1 z = 0 \iff$$

(integrerande faktor: $e^{-r_1 x}$)

$$-r_1 e^{-r_1 x} z + e^{-r_1 x} z = 0 \iff$$

$$D(e^{-r_1 x} z) = 0 \iff e^{-r_1 x} z = C \iff z = Ce^{r_1 x}$$

(C: konstant)

$$z(x) = Ce^{r_1 x} \iff$$

$$y'(x) - r_2 y(x) = Ce^{r_1 x} \iff$$

(integrerande faktor: $e^{-r_2 x}$)

$$-r_2 e^{-r_2 x} y(x) + e^{-r_2 x} y'(x) = Ce^{r_1 x} e^{-r_2 x} \iff$$

$$D(e^{-r_2 x} y(x)) = Ce^{(r_1 - r_2)x} \iff (\text{om } r_1 - r_2 \neq 0)$$

$$e^{-r_2 x} y(x) = \frac{C}{r_1 - r_2} e^{(r_1 - r_2)x} + B \iff$$

(B: ny konstant)

$$y(x) = \frac{C}{r_1 - r_2} e^{r_1 x - r_2 x + r_2 x} + Be^{r_2 x}$$

$$= Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad \text{där } A = \frac{C}{r_1 - r_2}$$

Vi har alltså kommit fram till att om det karakteristiska polynomet $r^2 + pr + q$ har två olika nollställen $r_1 \neq r_2$ så har den homogena linjära differentialekvationen

$$y'' + py' + qy = 0$$

den allmänna lösningen $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ där A och B är godtyckliga konstanter.

Föreläsning 16, del c

Ex) Lös differentialekvationen $2y'' - 4y' - 6y = 0$!

Karaktäristiskt polynom:

$$2r^2 - 4r - 6 = 2(r^2 - 2r - 3) =$$ (konjugatregeln)

$$= 2\left((r^2 - 2r + 1) - 4\right) = 2\left((r-1)^2 - 4\right) =$$

$$= 2\left((r-1) + 2\right)\left((r-1) - 2\right) = 2(r+1)(r-3)$$

Nollställen: $r_1 = -1$ och $r_2 = 3$

Allmän lösning till differentialekvationen:

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{-x} + Be^{3x}$$

Vad händer om det karaktäristiska polynomet har ett dubbelt nollställe ($r_1 = r_2$)? (Jfr del b)

$$D\left(e^{-r_2 x} y(x)\right) = Ce^{(r_1 - r_2)x} \iff$$

$$D\left(e^{-r_2 x} y(x)\right) = C \iff$$

$$e^{-r_2 x} y(x) = Cx + B \iff$$ (B: ny konstant)

$$y(x) = (Cx + B)e^{r_2 x} = (Cx + B)e^{r_1 x}$$

Vi får alltså den allmänna lösningen $y(x) = (Cx + B)e^{r_1 x}$ där C och B är godtyckliga konstanter.

Vad händer om det karaktäristiska polynomet saknar reella nollställen? I så fall har det två komplexa nollställen $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$ där a och b är reella tal.

Allmän lösning:

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

$$= Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} =$$

$$= Ae^{ax}e^{ibx} + Be^{a}e^{-ibx} =$$ (Eulers formler)

$$= Ae^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$+ Be^{ax}(\cos bx - i \sin bx) =$$

$$= e^{ax}(A + B)\cos bx + e^{a}(iA - iB)\sin bx =$$

$$= e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

där $C_1 = A + B$ och $C_2 = i(A - B)$ är godtyckliga (reella) konstanter.

Ex) När en fjäder sträcks ut är kraften (och därmed accelerationen y'') omvänt proportionell mot förflyttningen y från jämviktsläget:

$$y'' = -\omega^2 y \iff y'' + \omega^2 y = 0$$ (se Ex 5.20 !)

Föreläsning 16, del d

Det inhomogena fallet:

Tack vare lineariteten (se Föreläsning 14): Om vi hänner till en lösning y_p till en inhomogen linjär diffekvation (partikulär-lösning) och alla lösningar y_h till motsvarande homogena linjära diffekvation (homogenlösning) så får vi alla lösningar till den inhomogena diffekvationen som

$$y = y_h + y_p$$

Obs! Om konstanterna i y_h ska bestämmas genom begynnelsevillkor måste detta ske efter att man har lagt till y_p, annars blir det fel! Alltså: vänta med villkoren till allra sist, och kontrollera alltid att svaret blir rätt genom insättning!

Ex) Lös diffekvationen $2y'' - 4y' - 6y = 3x^2 + 1$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$

Vi såg i förra exemplet att $y_h = Ae^{-x} + Be^{3x}$

→

Vi försöker hitta en lösning y_p genom Ansatzen $y_p = ax^2 + bx + c$

Vi bestämmer konstanterna a, b och c genom att sätta in $y = ax^2 + bx + c$ i ekvationen!

$$y = ax^2+bx+c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$$

$$2y'' - 4y' - 6y = 3x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$2(2a) - 4(2ax+b) - 6(ax^2+bx+c) = 3x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6a = 3 \\ -8a - 6b = 0 \\ 4a - 4b - 6c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{17}{18} \end{cases}$$

Vi får partikulärlösningen $y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{17}{18}$ och den allmänna lösningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{17}{18}$$

$$\Rightarrow y'(x) = -Ae^{-x} + 3Be^{3x} - x + \frac{2}{3}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B - \frac{17}{18} = 1 \\ -A + 3B + \frac{2}{3} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -\frac{1}{18} \end{cases}$$

så vi får till slut $y(x) = 2e^{-x} - \frac{1}{18}e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{17}{18}$

Det fungerar att ansätta ett polynom av samma grad som högerledet om y finns med utan derivator i vänsterledet. Annars får vi höja graden! (Se demo)

Föreläsning 16, del e (demonstration testuppgifter)

5.6 Lös följande homogena differentialekvationer:

c) $y'' - 2y' + y = 0$

Lösning:

Karakteristiskt polynom: $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$

Ett dubbelt nollställe: 1

Allmän lösning: $y = (Ax + B)e^{1 \cdot x}$

Svar: $y(x) = (Ax + B)e^x$

d) $y'' + 4y = 0$

Lösning:

Karakteristiskt polynom: $r^2 + 4$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4$

Saknar reella lösningar! Men det finns två komplexa lösningar: $r = \pm 2i$ ($= a \pm bi$, där $a=0$, $b=2$)

Allmän lösning: $y = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx) =$

$= A \cos 2x + B \sin 2x$

Svar: $y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$

5.7 Lös följande inhomogena differentialekvationer:

c) $y'' + 2y' = 2x - 1$

Lösning: Vi löser först motsvarande homogena differentialekvation: $y'' + 2y' = 0$

Karakteristiskt polynom: $r^2 + 2r = r(r+2)$

Nollställen: $r_1 = 0$ och $r_2 = -2$

Homogenlösning: $y_h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = A + Be^{-2x}$

Nu vill vi hitta en partikulärlösning y_p!

Högerledet är ett förstagradspolynom, men vänsterledet saknar y-term så vi måste ansätta ett andragradspolynom:

$y = ax^2 + bx (+c) \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$

$y'' + 2y' = 2x - 1 \Leftrightarrow 2a + 2(2ax + b) = 2x - 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4a = 2 \\ 2a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Vi får $y_p = ax^2 + bx = \frac{1}{2}x^2 - x$

och $y = y_h + y_p = A + Be^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - x$

Svar: $y(x) = A + Be^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - x$