Föreläsning 5, del d

Annat viktigt specialfall av kedjeregeln:

$$DF(ax+b) = F'(ax+b)\cdot a \qquad \begin{pmatrix} a \text{ och } b \\ \text{konstanter} \end{pmatrix}$$

Om F är en primitiv funktion till f, och $a \neq 0$, så får vi

$$D\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right) = \frac{1}{a}DF(ax+b) =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot aF'(ax+b) = F'(ax+b) = f(ax+b)$$

och integreringregeln

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$$

Ex

- $$\int (3x-2)^5\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{1}{5+1}(3x-2)^{5+1} + C =$$
  $$= \frac{1}{18}(3x-2)^6 + C$$

- $$\int \tan(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)| + C$$

- $$\int \frac{dt}{e^t} = \int e^{-t}\,dt = \frac{1}{(-1)}e^{-t} + C = C - \frac{1}{e^t}$$

<u>Varning</u>! I allmänhet gäller:

$$\int f(g(x))\,dx \neq \frac{1}{g'(x)}F(g(x)) + C$$

Likheten gäller <u>bara</u> då $g(x)$ är ett förstagradspolynom $g(x) = ax+b$ så att $g'(x) = a$ är <u>konstant</u>. Det finns tyvärr ingen lika allmän integreringsregel som kedjeregeln för derivering.

Ex

$$\int e^{x^2}\,dx \neq \frac{1}{2x}e^{x^2} + C$$

(Den primitiva funktionen till e^{x^2} går inte att uttrycka med hjälp av elementära funktioner.)

Till sist två mycket viktiga standardintegraler, följer direkt från motsvarande deriveringsregler:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(= -\arccos x + D) \\ &(= -\operatorname{arccot} x + D) \end{aligned}$$

(där $D = C + \frac{\pi}{2}$ är en integrationskonstant, ska ej förväxlas med deriveringsoperatorn)