Lösningsförslag SF1683/SF1632 11 Januari 2019

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \tfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} && \text{för } x \in (0,1) \text{ och } t > 0 \\ &-\tfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(1,t) = 0 && \text{för } t > 0 \\ &u(x,0) = f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

där

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{för } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{för } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 1: Vi antar att lösningen är på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Om vi sätter in detta i diffeentialekvationen och delar med $X(x)T(t)$ så får vi att

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Då högerledet är oberoende av x och vänsterledet av t så måste båda leden vara konstanta; d.v.s.

$$X''(x) \pm \lambda^2 X(x) = T'(t) \pm \lambda^2 T(t) = 0. \tag{2}$$

Vi får tre fall: $\lambda = 0$ i (2), eller $\lambda \neq 0$ med $+$ resplektive $-$ i (2). Men om $\lambda = 0$ så får vi att $X(x) = ax + b$, men det första randdatat implicerar då att $a = 0$ och sedan implicerar det andra randdatat att $0 = X(1) = 0 \cdot 1 + b$ så $b = 0$. Men om $a = b = 0$ så är $X(x) = 0$ och vi har endast den triviala lösningen - så $\lambda = 0$ ger inga icke-triviala lösningar.

Om vi har $-$ och $\lambda \neq 0$ i (2) så får vi lösningen $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$. Men då ger $0 = X'(0) = (a-b)\lambda$ så $a = b$ men det andra randdatat ger då att $0 = (ae - b/e)$ vilket implicerar att $a = b = 0$ eftersom $a = b$. Så det enda fallet som ger icke-triviala lösningar är om $\lambda \neq 0$ och om vi har $+$ i (2).

Om vi har $+$ i (2) så är lösningarna

$$X(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x).$$

Eftersom $0 = X'(0) = b\lambda$ så måste $b = 0$. Och $0 = X(1) = a\lambda\cos(\lambda)$ implicerar att $a = 0$ (vilket ger en trivial lösning igen) eller $\lambda = \frac{\pi}{2} + n\pi$ för $n \in \mathbb{N}$.

För att förenkla notationen så skriver vi $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Vi får att följande funktioner är lösningar till differentialekvationen och randdata:

$$ae^{-\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x).$$

För att få en lösning till initialdata så ansätter vi att lösningen är

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x).$$

Vi beräknar a_n genom att identifiera a_n med Fourierkoefficienterna för $f(x)$: d.v.s.[1]

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(\lambda x)dx = 2\int_0^{1/2}\cos(\lambda_n x)dx = 2\left[\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n}\right]_{x=0}^{1/2} = \frac{2\sin(\lambda_n/2)}{\lambda_n}.$$

Vi får därför följande **Svar:** Lösningen är

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\lambda_n/2)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x)$$

där $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

2. Låt $V \subset L^2([-1,1];\mathbb{C})$ vara underrummet som spänns upp av basfunktionerna $\phi_0(x) = 1$ och $\phi_1(x) = x^2$. Hitta den funktion $f \in V$ som minimerar

$$\|\cos(x) - f(x)\|.$$

[1] Om man inte kommer ihåg formeln (vilket jag själv inte gjorde) så är det enkelt att härleda den. Vi beräknar helt enkelt normen i kvadrat av $\cos(\lambda_n)$ i $L^2([0,1])$ enligt $\int_0^1 \cos^2(\lambda_n x)dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n x)}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ för $n \geq 1$ vilket förklarar attt vi multiplicerar integralen med 2.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 2: Formeln för minsta kvadratanpassningen ger att lösningen är

$$\frac{\langle \cos(x), \hat{\phi}_0(x)\rangle}{\|\hat{\phi}_0\|^2}\hat{\phi}_0 + \frac{\langle \cos(x), \hat{\phi}_1(x)\rangle}{\|\hat{\phi}_1\|^2}\hat{\phi}_1, \tag{3}$$

om $\hat{\phi}_0$ och $\hat{\phi}_1$ är orthogonala vektorer som spänner upp V.

För att använda formeln så måste vi hitta en orthogonal bas för V vi väljer den basen $\hat{\phi}_0(x) = 1$ och (enl. Gram-Schmidt)

$$\hat{\phi}_1(x) = x^2 - \frac{1}{\int_{-1}^{1} |\hat{\phi}_0|^2 dx} \int_{-1}^{1} x^2 \hat{\phi}_0(x) dx \hat{\phi}_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Insatt i (3) ger detta följande **Svar:** Den bästa approximationen av $\cos(x)$ i V ges av

$$\frac{1}{\int_{-1}^{1} 1dx}\left(\int_{-1}^{1} \cos(x)dx\right) + \frac{1}{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}\left(\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\cos(x)dx\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \sin(1) + \left(-15\sin(1) + \frac{45}{2}\cos(1)\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

3. Hitta en lösning till följande integralekvation

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{-|t|}dt = \frac{1}{\cosh(x)}. \tag{4}$$

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 3: För enkelhetsskull så betecknar vi $g(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$.
Vi tar Fouriertransformationen av båda led, och använder faltningsformeln, vilket ger

$$\hat{f}(\omega)\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega) = \hat{g}(\omega).$$

Vi måste beräkna

$$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Det följer att

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1+\omega^2}{2}\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{g}(\omega) - (i\omega)^2\hat{g}(\omega)\right). \tag{5}$$

Eftersom[2] $\mathcal{F}(g'(x))(\omega) = i\omega\mathcal{F}(g)(\omega)$ så får vi att $-(i\omega)^2\hat{g}(\omega) = -\mathcal{F}(g'')(\omega)$. Om vi använder detta i (5) så får vi att

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(g - g'')(\omega).$$

Inverstransformationen och en enkel beräkning ger att

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) - g''(x)\right) = \frac{1}{\cosh^3(x)}.$$

4 a) Låt $a(n)$, $n = 0, 1, 2, ...$, vara en given följd av reella tal och $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}a(n)$ vara $z-$transformen av $a(n)$. Låt $k \geq 0$ vara ett heltal och härled ett explicit uttryck för $z-$transformen av $a(n+k)$ i termer av $A(z)$ och $a(0), a(1), ..., a(k-1)$.

[2 poäng]

b) Låt $a(0) = a(1) = 0$ och $a(n)$ uppfylla relationen

$$a(n+2) - 7a(n+1) + 12a(n) = 2, \text{ för } n = 0, 1, 2, ...$$

Använd $z-$transformen för att härleda en formel för $a(n)$.

[2 poäng]

[2] Även den här formeln är lätt att härleda eftersom en partiell integration ger $\mathcal{F}(g') = \int_R g'(x)e^{-i\omega x}dx = i\omega\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-i\omega x}dx = i\omega\mathcal{F}(g)(\omega)$.

lösningsförslag fråga 4. a) Enligt definitionen för z-transformen så är $z-$transformen av $\{a(n+k)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}a(n+k) = \sum_{n=k}^{\infty} z^{k-n}a(n) = z^k \sum_{n=k}^{\infty} z^{-n}a(n) = z^k A(z) - z^k a(0) - z^{k-1}a(1) - ... - za(k-1).$$

b) Om vi tar $z-$transformen av båda led, använder formeln från a), att $a(0) = a(1) = 0$ samt den givna formeln för $z-$transformen av α^n (med $\alpha = 1$) så får vi

$$z^2 A(z) - 7zA(z) + 12A(z) = 2\frac{z}{z-1}.$$

Det följer att

$$A(z) = 2\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{z-1} - 3\frac{1}{z-3} + \frac{8}{3}\frac{1}{z-4}.$$

Enligt den givna formeln för z-transformen av $\alpha^{n-k}\theta(n-k)$ så får vi, med $k=1$, att $z-$transformen av $\theta(n-k)\alpha^{n-1}$ är $\frac{1}{z-\alpha}$ så z-transformen av

$$\theta(n-1)\left(\frac{1}{3} - 3^n + \frac{2}{3}4^n\right)$$

är

$$\frac{1}{3}\frac{1}{z-1} - 3\frac{1}{z-3} + \frac{8}{3}\frac{1}{z-4}.$$

Detta ger

$$a(n) = \frac{1}{3}\frac{1}{z-1} - 3\frac{1}{z-3} + \frac{8}{3}\frac{1}{z-4}.$$

Del 2.

5. Låt f vara en likformigt kontinuerlig funktion på enhetscirkeln $\mathbb{T}$; d.v.s. för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett $\delta > 0$ så att för alla $x, y \in \mathbb{T}$ så att $|x-y| < \delta$ kommer $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Visa att det, för varje $\epsilon > 0$, finns ett trigonometriskt polynom

$$p_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

så att

$$|f(x) - p_N(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Du får använda att

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)}\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2,$$

där $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{int}$ samt att

$$F_N(t) \geq 0, \tag{6}$$

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(t)dt = 1, \tag{7}$$

och att för alla $\delta > 0$ och $x \in \mathbb{T}$ så kommer

$$\lim_{N\to\infty} \int_{t\in\mathbb{T}, |t-x|>\delta} F_N(t-x)dt = 0 \tag{8}$$

utan bevis.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 5. Vi börjar med att observera att

$$f * F_N(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t)F_N(t-x)dt = \frac{1}{2\pi(N+1)}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{im(t-x)}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi(N+1)}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{im(t)}dt\right)e^{-imx},$$

d.v.s. $f * F_N(x)$ är ett trigonometriskt polynom. Det räcker därför att visa att, givet $\epsilon > 0$ så finns det ett $N > 0$ så att

$$|f * F_N(x) - f(x)| < \epsilon \tag{9}$$

för alla $x \in \mathbb{T}$.

För att visa (9) så använder vi först likformig kontinuuitet av f för att välja ett $\delta > 0$ så att

$$|x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| > \frac{\epsilon}{2}.$$

Det följer att

$$\begin{aligned} |f * F_N(x) - f(x)| &= \{\text{enl. } (7)\} = \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}} F(t-x)(f(t) - f(x))dt \right| \leq \qquad (10) \\ \leq \int_{|x-t|<\delta} F_N(t-x)|f(t) - f(x)|dt &+ 2 \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(t)| \int_{\mathbb{T}, |x-t| \geq \delta} F_N(t-x)dt = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

där vi också har använt triangelolikheten, den givna olikheten (6) ($F_N \geq 0$) samt elementära olikheter för integralen.[3]

Vi kan använda vårt val av δ för att skatta

$$I_1 \leq \sup_{|x-t|<\delta} |f(t) - f(t)| \int_{\mathbb{T}} F_N(t-x)dt \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{11}$$

eftersom $F_N \geq 0$ och integralen av F_N är 1 (d.v.s. den givna likheten (7)). För att skatta I_2 så observerar vi att $M = \sup |f(t)|$ existerar och är ändlig eftersom f är kontinuerlig så vi kan använda (8) för att härleda

$$\lim_{N \to \infty} I_2 = 2M \lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{T}, |x-t| \geq \delta} F_N(t-x)dt = 0.$$

Det följer att om N är tillräckligt stort så kommer

$$I_2 < \frac{\epsilon}{2}. \tag{12}$$

Om vi väljer N så stort att (12) håller så kommer (11), (12) insatta i (10) att ge

$$|f * F_N(x) - f(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Detta är vad vi skulle bevisa.

6. Härled en lösningsformel för lösningen $u(x,t)$ till följande ekvationer:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(x-y,t)dy \quad \text{för } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{array} \tag{13}$$

där $f \in \mathcal{S}$ är en given funktion i Schwarzklassen.

Din härledning får vara informell; d.v.s. du behöver inte visa att integraler i lösningen är konvergenta, att det är tillåtet att derivera under integraler et.c. Ditt svar för innehålla olösta integraler, elementära funktioner (sin, cos exponentialfunktionen et.c.) och funktionen f.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 6. Vi gör en Fouriertransformation med avseende på x-variabeln och får

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \hat{u}(\omega, t), \tag{14}$$

där vi också använde faltningsformeln för Fouriertransformen och den givna formeln $\mathcal{F}(e^{-y^2})$.

Initialdata ger också att

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega). \tag{15}$$

Ekvation (14) och likheten (15) är en ordinär differentialekvation för varje fixt ω. Genom att lösa differentialekvationen så får vi

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} t}.$$

Om vi gör en inverstransformation av båda led och använder faltningsformeln så får viföljande lösningsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} f * K_t(x)$$

där

$$K_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} t} d\omega.$$

[3]Specifikt att $\left|\int_{\mathbb{T}} g(t)dt\right| \leq \int_{\mathbb{T}} |g(t)|dt$ samt att $\int_{\mathbb{T}} g(t)h(t)dt \leq \sup |h(t)| \int_{\mathbb{T}} g(t)dt$ för $g(t) \geq 0$.

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$
2. $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$
4. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega}dt$
5. $\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$
6. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
7. Om $a(n) = \alpha^n$, $n = 0, 1, 2, ...$ så är $z-$transformen av $a(n)$ lika med $A(z) = \frac{z}{z-\alpha}$
8. Låt $\theta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \le n \le k-1 \\ 1 & \text{om } k \le n \end{cases}$ då är $z-$transformen av $\alpha^n\theta(n-k)$ lika med $\frac{z^{k-1}}{z-\alpha}$.
9. $\int x^2\cos(x)dx = -2\sin(x) + 2x\cos(x) + x^2\sin(x)$.