Föreläsning 11, del a

Bestämda integraler (3.1 – 3.3)

- trappfunktioner (3.1)
- över- och undersummor (3.2)
- definition av bestämd integral (3.2)
- Riemannsummor (3.3)

Låt F vara en primitiv funktion till en funktion f.

Geometrisk tolkning av derivatan f':

f'(b) = lutningen av tangenten till grafen till f i punkten x = b.

Motsvarande geometrisk tolkning av den primitiva funktionen F?

Kan anta vilket värde som helst i punkten x = b, eftersom F inte är entydigt bestämd av f: vi kan alltid lägga till en konstant.

Värdet F(b) av den primitiva funktionen i punkten x = b kan alltså inte säga något om grafen till f i denna punkt.

Däremot är differensen F(b) – F(a) mellan värdena av F i två punkter b och a entydigt bestämd av f:

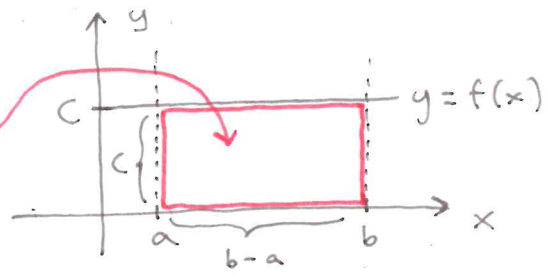
Om G är en annan primitiv funktion till f så har vi G(x) = F(x) + C och vi får:

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Vi kan alltså förvänta oss att F(b) – F(a) säger något om grafen till f: visar sig att denna differens är arean av området mellan grafen och x-axeln mellan a och b! (Räknad negativt om f(x) < 0!)

Ex) f(x) = C (konstant), F(x) = Cx

$$F(b) - F(a) = Cb - Ca = C(b-a) = \text{arean}$$



Föreläsning 11, del b

Def En funktion definierad på ett slutet intervall $[a, b]$ är en <u>trappfunktion</u> om det finns en indelning

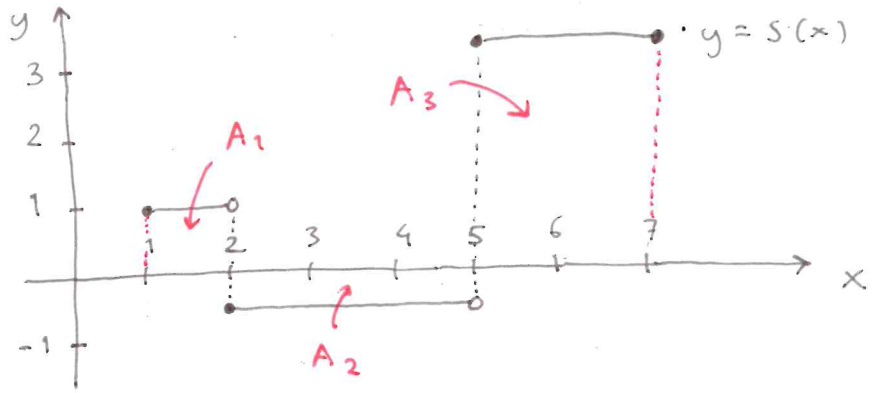
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

(för något $n \geq 1$) sådan att funktionen är konstant på varje delintervall $[x_{k-1}, x_k)$.

Ex Funktionen $s : [1, 7] \to \mathbb{R}$ definierad genom

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 1 \leq x < 2 \\ -1/2 & \text{om } 2 \leq x < 5 \\ \pi & \text{om } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

är en trappfunktion med graf:



För en trappfunktion $s(x)$ definierad på ett slutet intervall $[a, b]$ med indelningen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ inför vi betecknigen

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

och kallar denna summa för (den <u>bestämda</u>) integralen av $s(x)$ från a till b

---

Ex För trappfunktionen $s : [1, 7] \to \mathbb{R}$ i förra exemplet har vi

$$\int_1^7 s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{3} s(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= s(1)(2-1) + s(2)(5-2) + s(7)(7-5) =$$

$$= 1 \cdot 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 3 + \pi \cdot 2 = 1 - \tfrac{3}{2} + 2\pi = 2\pi - \tfrac{1}{2}$$

Låt A_k vara arean av rektangeln som begränsas av linjerna $x = x_{k-1}$ och $x = x_k$, funktionsgrafen och x-axeln.

Då har vi: $\int_1^7 s(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$

Föreläsning 11, del c

Def Låt f vara en funktion definierad och begränsad på det slutna intervallet $[a,b]$.

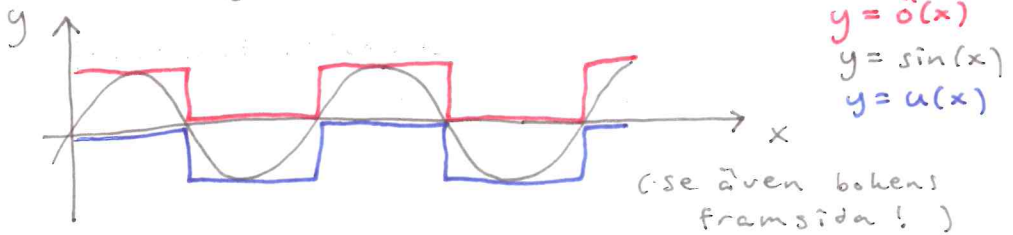
- En <u>överfunktion</u> till f är en trappfunktion $\ddot{o}(x)$ på $[a,b]$ sådan att
  $\ddot{o}(x) \geq f(x)$ för alla $x \in [a,b]$
- En <u>underfunktion</u> till f är en trappfunktion $u(x)$ på $[a,b]$ sådan att
  $u(x) \leq f(x)$ för alla $x \in [a,b]$

Integraler av över- och underfunktioner till f kallas <u>över-</u> och <u>undersummor</u> till f.

Ex Funktionen $\sin x$ har över- och underfunktioner

$$\ddot{o}(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 2k\pi \leq x < (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 2k\pi \leq x < (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -1 & \text{annars} \end{cases}$$



(se även bokens framsida!)

Def Funktionen f är (<u>Riemann-</u>)<u>integrerbar</u> om det finns precis ett tal I sådant att

$$\int_a^b u(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b \ddot{o}(x)\,dx$$

för alla över- och underfunktioner $\ddot{o}$ och u.

Talet I kallas för (den bestämda) <u>integralen av f från a till b</u> och betecknas

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \left(= -\int_b^a f(x)\,dx \right)$$

a och b kallas <u>integrationsgränser</u>

Sats Funktionen f är integrerbar om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ finns över- och undersummor $\ddot{o}$ och u sådana att

$$\int_a^b \ddot{o}(x)\,dx - \int_a^b u(x)\,dx < \varepsilon$$

Satsen säger att f är integrerbar om och endast om graten kan täckas av rektanglar vars sammanlagda area kan göras godtyckligt liten!

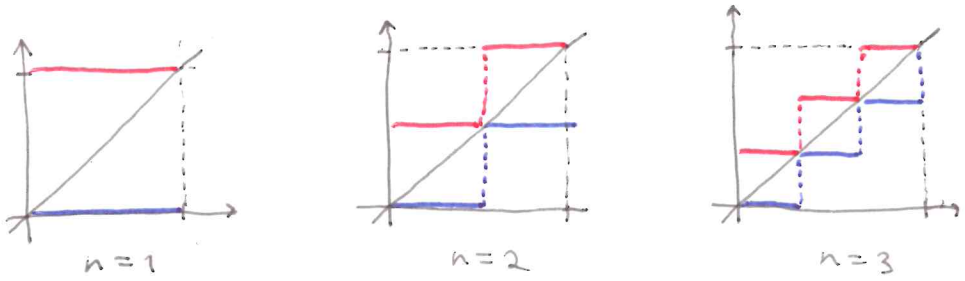
Sats Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så är f integrerbar på $[a,b]$!

Föreläsning 11, del 4

Ex) Visa att $f(x)=x$ är integrerbar på $[0,1]$!

För varje $n \geq 1$ kan vi definiera över- och underfunktioner $\ddot{o}(x)$ och $u(x)$ till $f(x)$:

$$\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n} \Rightarrow u(x) = \frac{k-1}{n}, \quad \ddot{o}(x) = \frac{k}{n}$$



$$\int_0^1 \ddot{o}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \left(\begin{array}{c}\text{aritmetisk}\\ \text{summa!}\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{n}{2}$$

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

$$\int_0^1 \ddot{o}(x)\,dx - \int_0^1 u(x)\,dx = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \to 0 \text{ då } n \to \infty \quad \left(\text{För varje } \varepsilon > 0 \text{ kan vi hitta ett } n \text{ sådant att } \frac{1}{n} < \varepsilon.\right)$$

Riemannsummor (3.3)

I stället för över- och undersummor kan man använda Riemannsummor och beräkna integraler som gränsvärden!

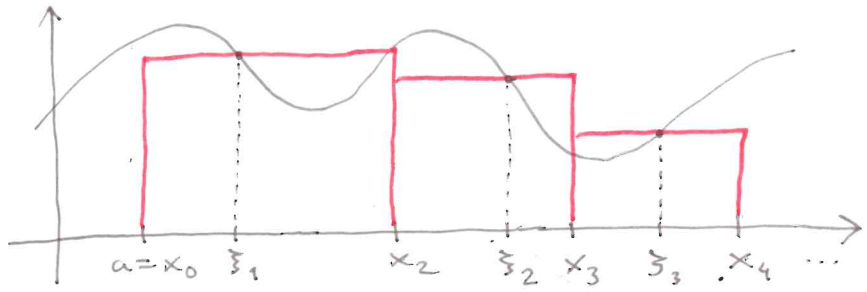
Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$ och dela in $[a,b]$ i delintervall som förut:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

(för något $n \geq 1$). Välj ett tal ξ_k i varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$. $(k = 1, 2, \ldots, n)$

Summan $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ kallas Riemannsumma.

I förra exemplet är undersumman ett specialfall av en Riemannsumma, men inte översummman.



Föreläsning 11, del e

Sats Låt f vara kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$ och låt $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av Riemannsummor till f, där varje Riemannsumma R_n svarar mot en indelning av $[a,b]$ i delintervall. Låt $d(R_n)$ vara längden av det längsta delintervallet och anta att $d(R_n) \to 0$ då $n \to \infty$.

(Vi har alltså en följd av indelningar som blir allt finare då n ökar.)

Då gäller: $\lim_{n\to\infty} R_n = \int_a^b f(x)\,dx$

Ex Beräkna $\int_0^1 x\,dx$!

Undersumman $\int_0^1 u(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

där $u(x) = \frac{k-1}{n}$ då $\frac{k-1}{n} \le x < \frac{k}{n}$

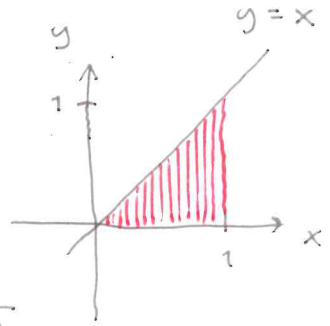
$(k = 1, 2, \dots, n)$ (se förra exemplet!)

är en Riemannsumma R_n för varje $n = 1, 2, 3, \dots$ och indelningarna blir allt finare då n ökar: $d(R_n) = \frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$. →

Enligt satsen har vi då

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$



Exemplet kan lätt generaliseras.

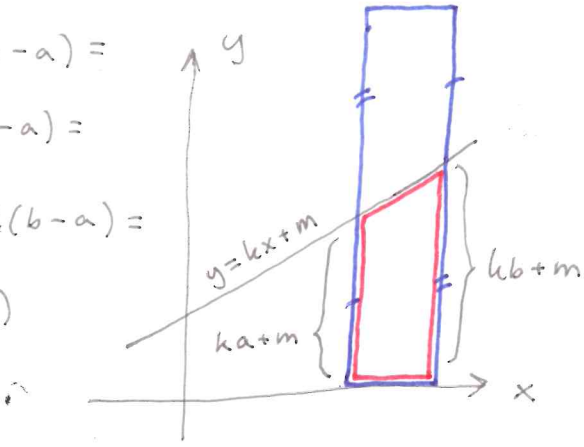
Man får då

$$\int_a^b (kx+m)\,dx = \frac{k}{2}(b^2-a^2) + m(b-a)$$

vilket stämmer överens med halva arean av rektangeln nedan:

$$\frac{1}{2}\big((ka+m)+(kb+m)\big)(b-a) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(k(a+b)+2m\big)(b-a) =$$

$$= \frac{k}{2}(b+a)(b-a) + \frac{2m}{2}(b-a) =$$

$$= \frac{k}{2}(b^2-a^2) + m(b-a)$$