Föreläsning 15, del b

Vi får alltså de positiva lösningarna $y(x) = e^c e^{F(x)}$ till den separabla diffekvationen $y'(x) = f(x)y(x)$ genom att använda kedjeregeln baklänges.

Just denna separabla diffekvation kan vi även lösa genom att använda produktregeln baklänges!

Multiplicera båda leden med $e^{-F(x)}$:

$$y'(x) = f(x)y(x) \Leftrightarrow e^{-F(x)}y'(x) = e^{-F(x)}f(x)y(x)$$

Flytta över så att vi får noll i högerledet:

$$e^{-F(x)}y'(x) - e^{-F(x)}f(x)y(x) = 0$$

Nu känner vi igen vänsterledet som derivatan av produkten $e^{-F(x)}y(x)$!

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-F(x)}y(x)\right) = \left(\frac{d}{dx}e^{-F(x)}\right)y(x) + e^{-F(x)}y'(x) =$$
$$= e^{-F(x)}(-F'(x))y(x) + e^{-F(x)}y'(x) =$$
$$= -e^{-F(x)}f(x)y(x) + e^{-F(x)}y'(x)$$

Diffekvationen blir alltså

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-F(x)}y(x)\right) = 0$$

Integrera båda leden!

$$e^{-F(x)}y(x) = B$$ konstant!

Multiplicera båda leden med $e^{F(x)}$!

$$e^{-F(x)}y(x) = B \Leftrightarrow y(x) = Be^{F(x)}$$

Vi får alltså den allmänna lösningen $y(x) = Be^{F(x)}$, som stämmer överens med $y(x) = e^c e^{F(x)}$ för $y > 0$ (med $B = e^c$).

Metoden att multiplicera med $e^{-F(x)}$, där F är en primitiv funktion till f, fungerar också för att lösa diffekvationer av typen

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

En sådan diffekvation kallas <u>linjär</u> (av första ordningen). Om $g(x) = 0$ <u>homogen</u>, annars <u>inhomogen</u>. Funktionen $e^{-F(x)}$ kallas <u>integrerande faktor</u>.