Föreläsning 7, del c

Integration genom variabelsubstitution:

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \qquad \text{där } x = g(t)$$

Vi har redan sett två specialfall av regeln.

Kom ihåg från Föreläsning 5:

(1) $\displaystyle\int \frac{g'(t)}{g(t)}\, dt = \ln|g(t)| + C$

(2) $\displaystyle\int f(at+b)\, dt = \frac{1}{a} F(at+b) + C$

där F är en primitiv funktion till f och a och b är konstanter ($a \neq 0$).

Vi visar att (1) och (2) är specialfall av den allmänna regeln:

(1): Sätt $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \iff$$

$$\int \frac{1}{g(t)}\, g'(t)\, dt = \int \frac{1}{x}\, dx \iff$$

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\, dt = \ln|x| + C = \ln|g(t)| + C$$

(2): Sätt $g(t) = at + b \Rightarrow g'(t) = a$:

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \iff$$

$$\int f(at+b)\, a\, dt = F(x) + C \iff$$

$$\int f(at+b)\, dt = \frac{1}{a} F(x) + C$$

(egentligen C/a)

Ex Beräkna $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\, dx$!

Vi vet att $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x + C$. Kan vi "göra om fyran till en etta"? Enligt (2):

$$\int \frac{1}{x^2+4}\, dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1/2} \arctan\left(\frac{1}{2}x\right)\right) + C = \underline{\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C}$$

Vi kan också använda regeln om integration genom variabelsubstitution "åt andra hållet":

$$\int \frac{1}{x^2+4}\, dx = \int \frac{1}{(2t)^2+4}\, dx = \int \frac{1}{4t^2+4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\frac{dx}{dt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 2\, dt = \frac{2}{4}\arctan t + C = \underline{\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C}$$

där $x = 2t \iff t = \frac{x}{2}$