Tentamen 2020-01-13, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik
SF1632 Differentialekvationer och transformer Ten2
13e Januari 2019
Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsammling inte tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Del 1.

Uppgift 1. Lös följande initialvärdesproblem

$$\begin{array}{ll} u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) & \text{för } x \in (0,\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 1 & \text{för } t > 0 \\ u(x,0) = 2 & \text{för } x \in (0,\pi/2) \\ u(x,0) = 1 & \text{för } x \in [\pi/2,\pi) \end{array}$$

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 1: Vi inför funktionen $v(x,t) = u(x,t) - 1$. Då kommer

$$\begin{array}{ll} v_{xx}(x,t) = v_t(x,t) & \text{för } x \in (0,\pi) \text{ och } t > 0 \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & \text{för } t > 0 \\ v(x,0) = 1 & \text{för } x \in (0,\pi/2) \\ v(x,0) = 0 & \text{för } x \in [\pi/2,\pi). \end{array}$$

(Observera att $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$ vilket är de randdata vi är vana att jobba med.)

Vi gör sedan en variabelseparationsansats: $v(x,t) = X(x)T(t)$ vilket insatt i den partiella differentialekvationen ger

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}.$$

Eftersom VL inte beror på t och HL inte beror på x så kan vi sluta oss till att

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \pm\lambda^2, \tag{1}$$

för någon konstant λ.

Vi får tre fall att betrakta. I det första fallet, när $\lambda = 0$, så kommer $X'' = 0$; d.v.s. $X(x) = ax + b$. Men om randdata $X(0) = X(\pi) = 0$ ska vara uppfullda så måste $b = 0$ och $a\pi = 0$, d.v.s. $X = 0$ vilket ger en trivial lösning.

I det andra fallet, när vi har $+\lambda^2$ (och $\lambda \neq 0$) så får vi att $X'' - \lambda^2 X = 0$. Så $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$. Men om randdata ska vara uppfyllda så måste $X(0) = a + b = 0$ och $X(\pi) = ae^{\lambda\pi} + be^{-\lambda\pi} = 0$ vilket implicerar att $a = b = 0$ så att lösningen blir trivial.[1]

[1] Här använder vi att $\lambda \neq 0$ vilket gör att determinanten av matrisen i ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\pi} & e^{-\lambda\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ är nollskiljd så ekvationssystemet har endast en trivial lösning.

I det sista fallet, när vi har $-\lambda^2$ (och $\lambda \neq 0$) i (1), så får vi att $X'' + \lambda^2 X = 0$ vilket ger att $X(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)$. Randdatat $X(0) = 0$ implicerar att $a = 0$ och randdatat $X(\pi) = 0$ implicerar att $b\sin(\lambda\pi) = 0$ vilket ger att antingen $b = 0$ (trivial lösning igen) eller att $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$. Vi kan sluta oss till att $X = b_n \sin(nx)$ och $T = ce^{-n^2 t}$.

För att uppfylla initialdata så gör vi en serieansats

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx). \tag{2}$$

Vi vill välja b_n så att

$$v(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{för } x \in (0, \pi/2) \\ 0 & \text{för } x \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Om vi multiplicerar den sista ekvationen med $\sin(nx)$ och integrerar över $(0, \pi)$ så får vi

$$\int_0^{\pi} \sin(nx) v(x,0) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(nx) dx = \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}. \tag{3}$$

Vi kan utvärdera VL i (3) genom att använda (2):

(4)

$$\int_0^{\pi} \sin(nx) v(x,0) dx = \int_0^{\pi} \sin(nx) \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx) dx = b_n \int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx = \frac{\pi}{2} b_n,$$

där vi använda att $\sin(nx)$ och $\sin(mx)$ är orthogonala på $(0, \pi)$.

Från (3) och (4) så får vi att

$$b_n = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}.$$

Detta ger vårt **Svar:**

$$u(x,t) = v(x,t) + 1 = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Uppgift 2) Hitta en följd $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ så att

$$x(n) + 2\sum_{k=0}^{n} (n-k) x(k) = 5^{n-1}.$$

Du får använda följande formler utan motivering:

1) $\mathcal{Z}(x * y) = X(z)Y(z)$

2) $\mathcal{Z}(\lambda^{n-k}\theta(n-k)) = \frac{z^{1-k}}{z-\lambda}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$, $|z| > |\lambda|$. Här är

$$\theta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{för } n = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \\ 1 & \text{för } n \geq k \end{cases}$$

Heavisidefuntionen.

3) $\mathcal{Z}(nx(n)) = -zX'(z)$

4) $\mathcal{Z}\left(a^{n-1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \frac{z}{z^2 + a^2}$

5) $\mathcal{Z}(x(n-k)\theta(n-k)) = z^{-k}X(z)$ där θ är Heavisidefunktionen såsom i 2).

I alla formler står $\mathcal{Z}$ för z-transformen och $\mathcal{Z}(x) = X(z)$ och $\mathcal{Z}(y) = Y(z)$ för följder $x(n)$ och $y(n)$. Slutligen står $x * y$ för faltningen (the convolution) av följderna $x(n)$ och $y(n)$.

[4 poäng]

Lösningsförslag uppgift 2): Vi skriver om den rekursiva relationen

$$x(n) + 2N(n) * x(n) = \frac{1}{5}5^n$$

där $N(n) = n$. Om vi $z-$transformerar båda led och använder faltningsformeln 1) så får vi

$$X(z) + 2\mathcal{Z}(N)(z)X(z) = \frac{1}{5}\mathcal{Z}(5^n)(z) = \frac{1}{5}\frac{z}{z-5} \tag{5}$$

där vi använde formel 2) (med $k = 0$ och $\lambda = 5$) i den sista likheten.

För att beräkna $\mathcal{Z}(N)$ så observerar vi, enligt formel 2), att $\mathcal{Z}(1) = \frac{z}{z-1}$ och, enligt formel 3),

$$\mathcal{Z}(N) = \mathcal{Z}(n \cdot 1) = -zD\frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Vi kan därför skriva (5)

$$X(z)\left(1 + 2\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{1}{5}\frac{z}{z-5},$$

eller

$$X(z) = \frac{1}{5}\frac{z(z-1)^2}{(z-5)(z^2+1)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\frac{3z^2+5}{(z-5)(z^2+1)}.$$

Om vi partialbråksuppdelar[2]

$$\frac{3z^2+5}{(z-5)(z^2+1)} = \frac{40}{13}\frac{1}{z-5} - \frac{1}{13}\frac{z}{z^2+1} + \frac{5}{13}\frac{1}{z^2+1}$$

så kan vi skriva

$$X(z) = \frac{1}{5} + \frac{8}{13}\frac{1}{z-5} - \frac{1}{65}\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{13}\frac{1}{z^2+1}.$$

Om vi inverstransformerar detta, med hjälp av formel 4) och 5), så får vi vårt **Svar:**

$$x(n) = \frac{\delta_0}{5} + \frac{8}{13}5^{n-1}\theta(n-1) - \frac{1}{65}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{13}\theta(n-1)\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

Uppgift 3) En signalbehandlare omvandlar en insignal $f(t)$ till en utsignal $F(t) = k * f(t)$ för någon funktion $k(t)$. Experiment visar att

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt = \begin{cases} \hat{f}(\omega) & \text{om } 0 < \omega < 1 \\ 0 & \text{om } \omega < 0 \text{ eller } \omega > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Hitta funktionen $k(t)$.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 3. Vi börjar med att observera att (6) säger att

$$\hat{F}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \hat{f}(\omega) & \text{om } 0 < \omega < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{array} \right\} = (H(\omega) - H(\omega - 1))\hat{f}(\omega),$$

som L^2-funktioner där H är Heavisidefunktionen. Använder vi faltningsformeln för Fouriertransformen och $F = k * f$ så får vi att

$$\hat{F}(\omega) = \hat{k}\hat{f} = (H(\omega) - H(\omega-1))\hat{f}(\omega) \Rightarrow \hat{k}(\omega) = H(\omega) - H(\omega - 1).$$

[2]Jag skriver inte ut de exakta beräkningarna eftersom de är långa men helt elementära.

Om vi använder inverstransformen på $\hat{k}$ så får vi

$$k(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} (H(\omega) - H(\omega-1)e^{i\omega t})d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{i\omega t}d\omega = \frac{-i}{2\pi}\frac{e^{it}-1}{t},$$

vilket är vårt svar.

Uppgift 4. Laguerre polynomen $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}D^n\left(x^n e^{-x}\right)$ utgör en orthonormal bas i rummet $L^2([0,\infty), e^{-x})$, d.v.s. L^2-rummet med inre produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

Vidare så

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0 \quad \text{för } x \geq 0.$$

Hitta en lösning $u(x) \in L^2([0,\infty), e^{-x})$ till

$$xu''(x) + (1-x)u'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}L_n(x) \quad \text{för } x \geq 0$$
$$u(0) = 2.$$

Beräkna $L^2([0,\infty), e^{-x})$-normen av din lösning.

Du får använda att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ och ditt svar får innehålla en icke utvärderad summa men inga oberäknade normer.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 4: Man ser direkt att

$$v(x) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}L_n(x)$$

är en lösning till differentialekvationen, dock inte nödvändigtvis till randdata. Observera att

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}D^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{n+k}}{k!}\right),$$

vilket implicerar att $L_n(0) = 1$. Därför så kommer

$$v(0) = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = -1.$$

Eftersom konstanter är lösningar till differentialekvationen (specifikt så är $L_0(x) = 1$ en lösning) så kommer

$$u(x) = 3 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}L_n(x)$$

att vara en lösning. Dessutom så kommer $u(0) = 3 - 1 = 2$; så u uppfyller initialdata.

Vi måste nu beräkna $L^2([0,\infty), e^{-x})$ normen av $u(x) = 3L_0(x) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}L_n(x)$. Men detta är mer eller mindre trivialt eftersom Laguerrepolynomen är en orthonormal bas:

$$\|u\|^2 = 9 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n-1)^2}.$$

Vi får därför följande **Svar:** $u(x) = 3 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} L_n(x)$ är en lösning och

$$\|u\| = \sqrt{9 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n-1)^2}}.$$

Del 2.

Uppgift 5. a) Formulera Cauchy-Schwarz olikhet för realvärda funktioner i $L^2([-1,1])$.

[1 poäng]

b) Bevisa Cauchy-Schwarz olikhet för realvärda funktioner i $L^2([-1,1])$.

[2 poäng]

c) Hitta ett (icke trivialt) villkor på två realvärda funktioner $f, g \in L^2([-1,1])$ så att man får likhet i Cauchy-Schwarz olikhet om man stoppar in f och g i olikheten.

[1 poäng]

Lösningsförslag fråga 5 a) Cauchy-Schwarz olikhet i $L^2([-1,1])$ säger att om $f, g \in L^2([-1,1])$ så

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|.$$

b) Olikheten är trivial om $\|f\| = 0$ eller om $\|g\| = 0$ så vi kan anta att $\|f\| \neq 0$ och $\|g\| \neq 0$. Dela båda led i olikheten med $\|f\|\|g\|$ och använd linjäriteten för den inre produkten så får vi att följande är ekvivalent med Cauchy-Schwarz olikhet

$$\left|\left\langle \frac{f}{\|f\|}, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle\right| \leq 1.$$

Det räcker därför att visa olikheten för $\|f\| = \|g\| = 1$.

Så antag att $\|f\| = \|g\| = 1$, och att $\langle f, g\rangle \geq 0$ (annars så kan man visa motsvarande för $-f$ och g). Eftersom normen är icke-negativ så kommer

$$\langle f-g, f-g\rangle = \|f-g\|^2 \geq 0,$$

med likhet om och endast om $f = g$. Om vi utvecklar vänsterledet i den sista ekvationen så får vi

$$0 \leq \langle f-g, f-g\rangle = \langle f, f\rangle - \langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle.$$

Genom att använda symetri för (den reella) inre produkten och att $\langle f, f\rangle = \|f\|^2 = 1$ och motsvarande för g så får vi

$$\langle f, g\rangle \leq 1.$$

Eftersom vi antagit att $\langle f, g\rangle \geq 0$ så är detta det vi vill visa.

c) I beviset av Cauchy-Schwarz olikhet så påpekade vi att vi fick likhet om och endast om $f = g$ under antagandet att $\|f\| = \|g\| = 1$. Detta innebär att vi får likhet om och endast om

$$\frac{f}{\|f\|} = \frac{g}{\|g\|}.$$

Vi kan sluta oss till att vi får likhet i Cauchy-Schwarz olikhet om och endast om $f = c \cdot g$ för någon konstant c.

Uppgift 6. Låt $f \in \mathcal{S}$ (Schwarzklassen). Kommer $\hat{f} \in \mathcal{S}$? Svaret måste motiveras för poäng. Du behöver dock inte bevisa alla detaljer. Det räcker att du visar att du förstått varför ditt svar är sant.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 6: Någonting i stil med diskussionen i Kapitel 8.5 (fram till Sats 8.2) i Vretblad eftersökes.