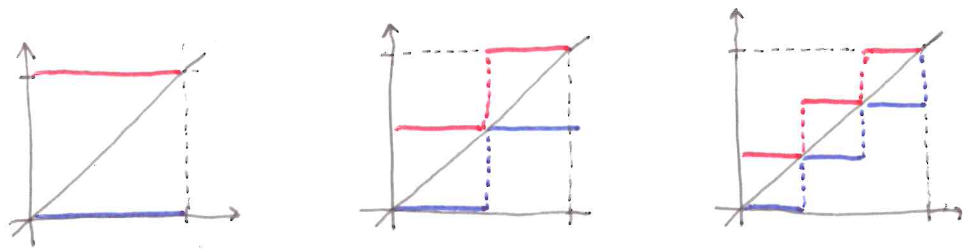
Föreläsning 11, del d

Ex Visa att $f(x)=x$ är integrerbar på $[0,1]$!

För varje $n \geqslant 1$ kan vi definiera över- och underfunktioner $ö(x)$ och $u(x)$ till $f(x)$:

$$\frac{k-1}{n} \leqslant x < \frac{k}{n} \Rightarrow u(x) = \frac{k-1}{n}, \quad ö(x) = \frac{k}{n}$$



$n=1$ $\quad$ $n=2$ $\quad$ $n=3$

$$\int_0^1 ö(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \left(\begin{array}{c}\text{aritmetisk}\\ \text{summa!}\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{n}{2}$$

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

$$\int_0^1 ö(x)\,dx - \int_0^1 u(x)\,dx = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) =$$

$= \frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$ (För varje $\varepsilon > 0$ kan vi hitta ett n sådant att $\frac{1}{n} < \varepsilon$.)

Riemannsummor (3.3)

I stället för över- och undersummor kan man använda Riemannsummor och beräkna integraler som gränsvärden!

Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$ och dela in $[a,b]$ i delintervall som förut:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

(för något $n \geqslant 1$). Välj ett tal ξ_k i varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$. $(k=1,2,\ldots,n)$

Summan $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ kallas Riemannsumma.

I förra exemplet är undersumman ett specialfall av en Riemannsumma, men inte översumman.