Föreläsning 10, del c

Primitiva funktioner / obestämda integraler

(repetition / sammanfattning, fler exempel och kommentarer)

Låt F vara en primitiv funktion till f, så att $F'(x) = f(x)$.

- Produktregeln baklänges ger formeln för partialintegration:

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

- Kedjeregeln baklänges ger:

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = F(g(t)) + C$$

Denna regel kan användas då vi vill integrera en produkt av två funktioner, där den ena är den inre derivatan till den andra. Viktiga specialfall:

- $\int f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}F(at+b) + C$
- $\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln|g(t)| + C$

Regeln kan även användas "åt andra hållet" genom variabelsubstitution $x = g(t)$:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$$\left(= \int f(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt \right)$$

Vi ersätter då ett (krångligt) uttryck i x med en ny variabel t. Men för att få $g(t)$ måste vi lösa ut x, och alltså omvänt skriva x som ett uttryck i t.

Ex) Beräkna $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$! (Uppgift 2.13!)

Sätt $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \quad (x, t \geq 0)$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t \frac{dx}{dt}\,dt = \int e^t(2t)\,dt =$$

$$= 2\int e^t t\,dt = \text{(partialintegration!)}$$

$$= 2\left(e^t t - \int e^t\,dt\right) = 2(e^t t - e^t) + C =$$

$$= 2e^t(t-1) + C = \underline{2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C}$$

byt tillbaka!