Föreläsning 12, del e (demonstration testuppgifter)

**3.5** Beräkna med partialintegration

a) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

Lösning: $\int_0^1 \arctan x \, dx = \int_0^1 1 \cdot \arctan x \, dx =$

$= \left[ x \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x^2+1} \, dx =$

$= (1 \cdot \arctan 1 - 0 \cdot \arctan 0)$

$- \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \, dx =$

$= \arctan 1 - \frac{1}{2} \left[ \ln (x^2+1) \right]_0^1 =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

Svar: $\int_0^1 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

**3.6** Beräkna med hjälp av substitution

c) $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} \, dx$

Lösning:

Vi testar substitutionen $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$

$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} t^2 = 2t$

Nu måste vi också kolla vad som händer med integrationsgränserna!

$x = 4 \Leftrightarrow t = 2$

$x = 1 \Leftrightarrow t = 1$

$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} \, dx = \int_{x=1}^{x=4} \frac{1}{x+\sqrt{x}} \, dx =$

$= \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{t^2+t} \frac{dx}{dt} \, dt = \int_{t=1}^{t=2} \frac{2t}{t^2+t} \, dt$

$= 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} \, dt = 2 \left[ \ln (t+1) \right]_1^2 =$

$= 2 \left( \ln (2+1) - \ln (1+1) \right) = 2 (\ln 3 - \ln 2) =$

$=$ (räkneregler för logaritmer!) $=$

$= 2 \ln \frac{3}{2} \quad \left( = \ln \left( \frac{3}{2} \right)^2 \right)$

Svar: $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} \, dx = 2 \ln \frac{3}{2}$