Föreläsning 10, del d

Ex Kan vi använda partialintegration för att beräkna $\int \tan x \, dx$?

$$\int \tan x \, dx = \int \sin x \frac{1}{\cos x} \, dx =$$

$$= (-\cos x)\frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x)\left(-\frac{-\sin x}{(\cos x)^2}\right) dx =$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \int \tan x \, dx$$

Vi får tillbaka den ursprungliga integralen – vanligtvis kan vi då lösa ut den genom att "flytta över", men i det här fallet:

$$\int \tan x \, dx - \int \tan x \, dx = -1 + C \iff$$

$$0 = -1 + C$$

Vid "överflyttning" måste man se till att inte tappa någon integrationskonstant, vilket i detta fall skulle ge $0 = -1$!!!

Bättre att beräkna $\int \tan x \, dx$ genom att skriva $\tan x = -g'(x)/g(x)$ där $g(x) = \cos x$:

$$\int \tan x \, dx = -\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

Ex Beräkna $\int x \arctan x \, dx$!

Partialintegrera! Ofta lämpligt att välja att derivera polynomet, men här väljer vi att integrera $f(x) = x$, med primitiv funktion $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2+1}{2}$:

Obs!

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2+1}{2} \arctan x - \int \frac{x^2+1}{2} \frac{1}{x^2+1} \, dx =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int dx =$$

$$= \underline{\frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C}$$

Till sist, receptet för integration av rationella funktioner $T(x)/N(x)$:

1. Om grad $T(x) \geq$ grad $N(x)$: <u>polynomdivision</u>!
2. <u>Faktorisera</u> $N(x)$ så långt som möjligt
3. <u>Partialbråksuppdela</u> (Ansatz enligt regel)
4. <u>Kvadratkomplettera</u> andragradspolynom
5. Använd <u>standardintegraler</u> $\left(\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C, \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C\right)$