Övningar till Kapitel 1 Logik

1.1 Utsagan

1.1.1. Vilka av nedanstående meningar är utsagor? För de som är utsagor, ange om de är sanna eller falska.

a. Sport är intressant.
b. Ät upp maten!
c. 1 + 1 = 2.
d. Alla människor har lika värde.
e. 1 + 1 = 56.

1.2 Konjunktion

1.2.1. Fyra av meningarna i övning 1.1.1 är utsagor. Kalla dessa utsagor u_1, u_2, u_3 och u_4. Formulera konjunktionerna mellan varje par av utsagor ($u_1 \wedge u_2$, $u_1 \wedge u_3$ och så vidare.) Ange också om de är sanna eller falska.

1.3 Disjunktion

1.3.1. Gör om övning 1.2.1, men bilda nu istället disjunktionerna mellan varje par av utsagor bland utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4.

1.4 Negation

1.4.1. Gör om övning 1.2.1, men bilda nu negationerna av utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4.

1.5 Implikation

1.5.1. Gör återigen om övning 1.2.1, men bilda nu implikationerna mellan varje par av utsagor bland utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4.

1.6 Ekvivalens

1.5.1. Gör återigen om övning 1.2.1, men bilda nu ekvivalensen mellan varje par av utsagor bland utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4.

1.7 Egenskaper hos konnektiven

1.7.1. Bygg en sanningstabell för de logiska uttrycken $p \wedge q$, $p \wedge \sim q$, $\sim p \wedge q$ och $\sim p \wedge \sim q$. (De kan alla rymmas i samma tabell. Det är bra att addera kolumner för $\sim p$ och $\sim q$ i denna tabell.)

1.7.2. Bygg en sanningstabell för de logiska uttrycken $p \vee q$, $p \vee \sim q$, $\sim p \vee q$ och $\sim p \vee \sim q$. (De kan alla rymmas i samma tabell. Det är bra att addera kolumner för $\sim p$ och $\sim q$ i denna tabell.)

1.7.3. Studera kolumnerna i sanningstabellerna hörande till övningarna 1.7.1 och 1.7.2. Vilka slutsatser kan du dra på basis av inspektion av dessa kolumner?

1.7.4. Bygg en sanningstabell för de logiska uttrycken $p \to q$, $p \to\sim q$, $\sim p \to q$ och $\sim p \to\sim q$. Studera kolumnerna och jämför dem med kolumnerna i sanningstabellerna hörande till övning 1.7.2. Vilka slutsatser kan du dra?

1.7.5. Bygg en sanningstabell för utsagan $p \to (q \wedge \sim r)$.

1.7.6. Bygg en sanningstabell för utsagan $p \wedge (q \to (\sim r \vee s))$.

1.8 Dubbelstreckade pilar

1.8.1. Baserat på dina observationer hörande till övningarna i förgående avsnitt, formulera ett antal ekvivalenser med dubbelstreckade pilar. (Till exempel bör $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ vara en av dessa ekvivalenser.)

1.8.2. Gäller $p \to (q \wedge \sim r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to\sim r)$? Motivera ditt svar med en sanningstabell.

1.9 Argumentation och logiska härledningsregler

1.9.1. Visa följande lagar med sanningstabeller:

1. Kommutativa lagarna:	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ samt $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
2. Associativa lagarna:	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ samt
	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3. Distributiva lagarna:	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ samt
	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Lagen om dubbel negation:	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
5. Idempotens:	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ samt $p \vee p \Leftrightarrow p$
6. DeMorgans lagar:	$\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$ samt $\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$
7. Absorptionslagarna:	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ samt $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

1.9.2. Visa följande härledningsregler med sanningstabell:

Dilemma: Bevis genom falluppdelning
1. $p \vee q$
2. $p \to r$
3. $q \to r$

$\therefore r$

1.9.3. Formulera en annan regel liknande den i föregående övning som du kallar *Trilemma* och som har ett liknande utseende som regeln för *Dilemma* men som baserar sig på tre utsagor *p*, *q* och *r* istället. Skapa ett bevis med en sanningstabell.

1.9.4. Skapa en sanningstabell för det logiska uttrycket $p \to (q \wedge r)$.

1.10 Bevisföring och indirekt härledning

1.10.1. Är följande härledning korrekt?

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $\sim r$.

$\therefore \sim p$

Formulera ett bevis genom att ange vilka härledningsregler som används för att komma fram till slutsatsen $\sim p$ om härledningen är korrekt. Om härledningen inte är korrekt, använd sanningstabelll för att finna en tilldelning av sanningsvärden på p, q och r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1.10.2. Är följande härledning korrekt?

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $\sim r$.

$\therefore \sim p \wedge \sim q$

Formulera ett bevis genom att ange vilka härledningsregler som används för att komma fram till slutsatsen $\sim p \wedge \sim q$ om härledningen är korrekt. Om härledningen inte är korrekt, använd sanningstabelll för att finna en tilldelning av sanningsvärden på p, q och r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1.10.3. Visa att följande härledning är korrekt genom att ange de härledningsregler som successivt leder fram till slutsatsen.

1. $p \vee q$
2. $r \vee \sim p$
3. $t \vee r \vee \sim q$
4. $p \to \sim t$
5. $t \to \sim q$

$\therefore r$

Ledning: Det finns olika ansatser. Du kan arbeta med att omformulera premisserna, till exempel gäller 2. $r \vee \sim p \Leftrightarrow \sim p \vee r \Leftrightarrow p \to r$. Du kan också anta motsatsen till det som ska visas (r) och se vart det leder. Det bör leda till en motsägelse. Du kan också kombinera dessa båda angreppssätt.

Blandade övningar

(Blandade övningar är av tentamenskaraktär.)

1.1 Skapa en sanningstabell för det logiska uttrycket $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$.

1.2 Använd sanningstabellen i föregående uppgift för överväga om det går att att dra slutsatsen $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \Rightarrow p \vee \sim r$.

1.3 Skapa en sanningstabell för det logiska uttrycket $((p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge \sim (p \rightarrow r)$.

1.4 Använd sanningstabell i föregående uppgift för utreda om det går att att dra slutsatsen $((p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge \sim (p \rightarrow r) \Rightarrow p$.

1.5 Skapa en sanningstabell för det logiska uttrycket $((p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge \sim s)) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$.

1.6 Använd sanningstabellen i föregående uppgift för att dra slutsatsen (1.13)
$((p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge \sim s)) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow p \rightarrow q$.

1.7. Skriv en sanningstabell för följande uttryck $(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim (q \wedge \sim r)$.
(Från tentamen i diskret matematik den 28 augusti 2000.)

1.8. Är följande slutledning korrekt?

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow \sim p$
3. $p \vee r \vee s$
4. $s \rightarrow t$
5. $t \rightarrow (\sim s \vee p)$

$\therefore r$

Om slutledningen är korrekt, det vill säga om *r* följer av premisserna 1-5, så visa hur. Antingen genom sanningstabell eller genom att rada upp slutledningsregler (*Modus Ponens* etc.) med angivande av hur premisserna används för att komma fram till *r*. *Om* slutledningen inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden som uppfyller premisserna, men inte *r*.

(Från tentamen i diskret matematik den 13 januari 2004.)

1.9 Är följande logiska slutledning korrekt? I så fall ange hur man kommer fram till slutsatsen samt ange vilka logiska slutledningsregler (*Modus Ponens*, *Modus Tollens* etc.) som används. Om slutledningen inte är korrekt, ge ett exempel på en tilldelning av sanningsvärden på utsagorna *p*, *q*, *r* och *s* som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1. $\sim s \wedge q$
2. $p \wedge q \rightarrow r$
3. $s \vee \sim r$

$\therefore \sim p$

(Från tentamen i diskret matematik den 21 december 2000.)

1.10 Avgör om följande slutledning är logiskt korrekt eller inte. Om den är logiskt korrekt, visa i så fall hur slutsatsen följer av premisserna 1-3. Ange då också alla slutledningens delsteg med angivande av alla slutledningsregler. Om slutledningen inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden (*sant* eller *falskt*) till p, q och r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1. $p \to q \vee r$
2. $p \vee \sim q$
3. $r \vee q$

$\therefore q$

(Från tentamen i diskret matematik den 11 januari 2001.)

1.11 Är följande logiska slutledning korrekt?

1. $p \vee q$
2. $q \vee r$
3. $p \vee r$
4. $p \to s$

$\therefore q \vee s$

Om den är korrekt, visa hur slutsatsen följer av premisserna och ange tydligt vilka slutledningsregler du använder (*Modus Ponens, Tollens* etc.). Om den inte är korrekt, ge ett exempel på en tilldelning av sanningsvärden för utsagorna p, q, r och s som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

(Från tentamen i diskret matematik den 18 april 2001.)

1.12 Låt p, q, r, s och t vara utsagor. Är följande logiska slutledning riktig?

1. $p \vee q$
2. $q \to r$
3. $p \wedge s \to t$
4. $\sim r$
5. $\sim q \to s$

$\therefore t$.

Om slutsatsen är riktig, visa varför genom att logiskt bevisa att t följer från premisserna 1-5. Redovisa varje delsteg med angivande av namnet på den logiska regel ni använder. Om slutledningen inte är riktig ange en situation då det inte stämmer (dvs ange en tilldelning av sanningsvärden som uppfyller alla premisser men där ändå inte t är sann).

(Från tentamen i diskret matematik den 17:e december 1999.)

Använd sanningstabeller eller bevisföring för att avgöra om nedanstående härledningar är korrekta eller inte.

1.13 1. $p \to (q \wedge r)$
2. $q \to (r \wedge s)$
3. $s \to r$
4. $r \to \sim s$

$\therefore \sim p$

1.14 1. $p \to q$
2. $\sim r \to \sim q$
3. $\sim (r \wedge u)$
4. $s \to (t \wedge u)$

$\sim (s \wedge p)$

1.15 1. $p \to q$
2. $\sim r \to \sim q$
3. $\sim (r \wedge u)$
4. $s \to (t \wedge u)$

$\therefore t$

1.16 1. $r \to \sim p$
2. $p \vee q$
3. $p \to r$
4. $\sim r \to \sim q$

$\therefore q$

1.17 Nedanstående härledning innehåller en motsägelse. Ta bort en premiss så att premisserna inte motsäger varandra. Avgör sedan om slutledningen är korrekt:
(Det kan finnas flera lösningar till denna uppgift.)

1. $p \vee r$
2. $p \to r$
3. $r \to s$
4. $\sim s$
5. $s \to q$

$\therefore q$

Svar och lösningar till övningar till kapitel 1 Logik

1.1.1.
a SANN (Nåja, det tycker i alla fall författaren.), c SANN, d SANN, e FALSK.

1.2.1.
u_1 = a = ”Sport är intressant.”, SANN
u_2 = c = ”1 + 1 = 2.”, SANN
u_3 = d = ”Alla människor har lika värde.”, SANN
u_4 = e = “1 + 1 = 56“. FALSK

$u_1 \wedge u_2$ = ”Sport är intressant och 1 + 1 = 2.” (= $u_2 \wedge u_1$), SANN
$u_1 \wedge u_3$ = ”Sport är intressant och alla människor har lika värde.” (= $u_3 \wedge u_1$), SANN
$u_1 \wedge u_4$ = ”Sport är intressant och 1 + 1 = 56.” (= $u_4 \wedge u_1$), FALSK
$u_2 \wedge u_3$ = ”1 + 1 = 2 och alla människor har lika värde.” (= $u_3 \wedge u_2$), SANN
$u_2 \wedge u_4$ = ”1 + 1 = 2 och 1 + 1 = 56.” (= $u_4 \wedge u_2$), FALSK
$u_3 \wedge u_4$ = ”Alla människor har lika värde och 1 + 1 = 56.” (= $u_4 \wedge u_3$). FALSK

1.3.1.
$u_1 \vee u_2$ = ”Sport är intressant eller 1 + 1 = 2.” (= $u_2 \vee u_1$),
$u_1 \vee u_3$ = ”Sport är intressant eller alla människor har lika värde.” (= $u_3 \vee u_1$),
$u_1 \vee u_4$ = ”Sport är intressant eller 1 + 1 = 56.” (= $u_4 \vee u_1$),
$u_2 \vee u_3$ = ”1 + 1 = 2 eller alla människor har lika värde.” (= $u_3 \vee u_2$),
$u_2 \vee u_4$ = ”1 + 1 = 2 eller 1 + 1 = 56.” (= $u_4 \vee u_2$),
$u_3 \vee u_4$ = ”Alla människor har lika värde eller 1 + 1 = 56.” (= $u_4 \vee u_3$).

1.4.1.
$\sim u_1$ = ~ a = ”Sport är inte intressant.”, FALSK. (Eftersom a = u_1 var SANN.)
$\sim u_2$ = ~ c = ”1 + 1 $\neq$ 2.”, FALSK. (Eftersom u_2 = c = ”1 + 1 = 2 var SANN.)
$\sim u_3$ = ~ d = ”Alla människor har inte lika värde.”, FALSK. (Eftersom u_3 = d var SANN.)
$\sim u_4$ = ~ e = “1 + 1 $\neq$ 56.“, SANN. (Eftersom u_4 = e var FALSK.)

1.5.1. Gör återigen om övning 1.2.1, men bilda nu implikationerna mellan varje par av utsagor bland utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4.

$u_1 \rightarrow u_2$ = ”Sport är intressant medför att 1 + 1 = 2.”. Detta är en SANN utsaga eftersom både förled och efterled är sanna.

$u_1 \rightarrow u_4$ = ”Sport är intressant medför att 1 + 1 = 56.”. Detta är en FALSK utsaga eftersom förledet är sant, men trots detta är inte efterledet sant.

$u_2 \vee u_3$ = ”1 + 1 = 2 eller alla människor har lika värde.” (= $u_3 \vee u_2$),

$u_4 \rightarrow u_2$ = " 1 + 1 = 56 medför att 1 + 1 = 2". Detta är en SANN utsagan eftersom förledet är falskt. (Vilken implikation som helst $p \rightarrow q$ bli sann om förledet är en falsk utsaga.)

Detta med implikationens sanningsvärde kan ibland vara förvirrande. Det beror på att vi aldrig brukar betrakta en implikation utan att dess förled är sant eller dess efterled är falskt. Det gör vi då använder slutledningsreglerna *Modus Ponens* och *Modus Tollens*. Vi är inte vana att hantera implikationer om deras förled är falska, men här börjar vi med det så att anse att detta är ovant är helt normalt.

1.6.1. Utsagorna u_1, u_2 och u_3 är alla sanna, därför är de alla ekvivalenta med varandra och således är $u_i \leftrightarrow u_j$ sann för *i* och *j* med värdena 1, 2 och 3. Utsagan u_4 är däremot falsk så om i har värdet 1, 2 eller 3 och *j* har värdet 4 i ekvivalensen $u_i \leftrightarrow u_j$ så har vi en falsk utsaga. Det enda sättet att bilda en sann utsaga på formen $u_i \leftrightarrow u_j$ involverandes värdet 4 på *i* eller *j* är om både *i* och *j* väljs till just 4.

1.7.1. Sanningstabell över olika konjunktioner.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$
Sann	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Falsk
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Sann

1.7.2. Sanningstabell över olika disjunktioner.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim p \vee \sim q$
Sann	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk	Sann
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann

1.7.3. Vi ser att det är lättare för en disjunktion att vara sann, det räcker ju med att bara en av utsagorna i disjunktionen är sann för att disjunktionen ska bli sann. På samma sätt är det lika mycket svårare för en disjunktion att bli falsk, det kräver ju att båda utsagorna i ska vara falska. Om vi betraktar tabellen över konjunktioner ser vi att precis samma förhållanden gäller fast sant och falskt har bytt roller. Det är enklare för en konjunktion att bli falsk, det räcker ju med att bara en av de ingående utsagorna är falsk. På samma sätt är det svårare för en konjunktion att blir sann, det kräver ju att båda utsagorna i konjunktionen är sanna. Vi kan också observera att om vi negerar sanningsvärdena i kolumnen för $p \vee q$ erhåller vi sanningsvärdena i kolumnen för $\sim p \wedge \sim q$. Detta ger oss $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$. Detta är en av DeMorgans Lagar. Den andra erhåller vi genom att betrakta kolumnerna för $p \wedge q$ och $\sim p \vee \sim q$ pch den lyder $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

1.7.4. Sanningstabell över olika implikationer

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$p \to \sim q$	$\sim p \to q$	$\sim p \to \sim q$
Sann	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	Falsk	Sann

Vi ser att kolumnerna för $p \to q$, $p \to \sim q$, $\sim p \to q$ och $\sim p \to \sim q$ är samma kolumner som vi finner i sanningstabellen för olika disjunktioner. Till exempel är kolumnen för $p \to q$ samma som kolumen för $\sim p \vee q$. Det betyder att dessa två utsagor är ekvivalenta. Vi har således $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$. På samma sätt kan vi dra slutstserna $p \to \sim q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, $\sim p \to q \Leftrightarrow p \vee q$ samt $\sim p \to \sim q \Leftrightarrow p \vee \sim q$. En implikation kan alltså alltid skrivas om som en disjunktion. Det kan ske på fyra sätt och dessa fyra sätt (fyra härledningsregler) är förborgade i varandra. Alla ryms i den första: $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$. Om vi från denna regel vill härleda till exempel den tredje kan vi ersätta p med $\sim p$. Vi får då $(\sim p) \to q \Leftrightarrow \sim (\sim p) \vee q$ som vi skriver om som $\sim p \to q \Leftrightarrow p \vee q$. Här har vi använt lagen om dubbel negation: $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$.

1.7.5. Sanningstabell för utsagan $p \to (q \wedge \sim r)$.

p	q	r	$\sim r$	$q \wedge \sim r$	$p \to (q \wedge \sim r)$
Sann	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk
Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Falsk
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Sann
Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann

Vi bygger upp tabellen med två hjälpkolumner, en för $\sim r$ och en för $q \wedge \sim r$.

1.7.6. Sanningstabell för utsagan $p \wedge (q \to (\sim r \vee s))$.

p	q	r	s	$\sim r$	$\sim r \vee s$	$q \to (\sim r \vee s)$	$p \wedge (q \to (\sim r \vee s))$
Sann	Sann	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Sann	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk
Sann	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk
Falsk	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk

Vi använder tre hjälpkolumner, en för $\sim r$, en för $\sim r \vee s$ och en för $q \to (\sim r \vee s)$.

1.8 Dubbelstreckade pilar

1.8.1. Dubbelstrecksekvivalenserna är redan formulerade i texten hörande till lösningen av 1.7.3 och 1.7.4.

1.8.2. Gäller $p \to (q \wedge \sim r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to \sim r)$?

Vi bildar en sanningstabell för $(p \to q) \wedge (p \to \sim r)$.

p	q	r	$\sim r$	$p \to q$	$p \to \sim r$	$(p \to q) \wedge (p \to \sim r)$
Sann	Sann	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann

Vi jämför nu kolumnen för $(p \to q) \wedge (p \to \sim r)$ och ser att den är identisk med kolumnen för $p \to (q \wedge \sim r)$ som studerades i sanningstabellen i uppgift 1.7.5. Vi drar således slutsatsen att $p \to (q \wedge \sim r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to \sim r)$.

1.9.1. Sanningstabell för kommutativa lagarna:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$
Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann
Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk

Sanningstabellen indikerar att kolumnen för $p \wedge q$ är identisk med kolumnen för $q \wedge p$ vilket ger att de utsagorna måste vara ekvivalenta. Samma sak gäller för utsagorna $p \vee q$ och $q \vee p$ och vi har således kommutativa lagarna $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ samt $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ vilka skulle bevisas.

På samma sätt kan de associativa lagarna $((p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ samt $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r))$ visas. Då kan det vara bra att infär hjälpkolumner. Den sanningstabellen kommer då att bestå av 8 rader eftersom vi har tre utsagor, p, q och r.

Distributiva lagarna ($p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ samt $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$), lagen om bubbel negation ($\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$), idempotens ($p \wedge p \Leftrightarrow p$ samt $p \vee p \Leftrightarrow p$), DeMorgans lagar ($\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$ samt $\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$) och absorptionslagarna ($p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ samt $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$) visas alla med precis samma teknik.

1.9.2.

Dilemma: Bevis genom falluppdelning
1. $p \vee q$
2. $p \to r$
3. $q \to r$

$\therefore r$

Sanningstabell för bevis av Dilemma:

p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$	Uppfyllda premisser
Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	1, 2, 3
Sann	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	1
Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	1, 2, 3
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	1, 3
Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	1, 2, 3
Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Falsk	1, 2
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	2, 3
Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann	2, 3

I sanningstabellen har vi indikerat de rader där alla premisser är uppfyllda och det är tre stycken. (Första, tredje och femte.) På alla dessa rader har r sanningsvärdet sann varför vi drar slutsatsen att r följer av de tre premisserna. Detta var vad som skulle visas.

1.9.3.

Trilemma: Bevis genom falluppdelning med tre fall
1. $p \vee q \vee r$
2. $p \to s$
3. $q \to s$
4. $r \to s$

$\therefore s$

Sanningstabellen får helt analogt utseende med den i föregående uppgift. Skillnaden blir att vi får 16 rader eftersom vi har 4 utsagor (p, q, r och s.)

1.9.4. Sanningstabell för det logiska uttrycket $p \to (q \wedge r)$.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$
Sann	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann
Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Sann

1.10.1.

Härledningen

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $\sim r$.

$\therefore \sim p$

är korrekt och följer genom följande bevis:

4. $\sim q$, följer av 2, 3 och *Modus Tollens*.
5. $\underline{\sim p}$, följer av 1, 4 och *Modus Tollens*.

1.10.2. Härledningen

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $\sim r$.

$\therefore \sim p \wedge \sim q$

är korrekt och följer genom beviset:

4. $\sim q$, följer av 2, 3 och *Modus Tollens*.
5. $\sim p$, följer av 1, 4 och *Modus Tollens*.
6. $\sim p \wedge \sim q$, följer av 4 och 5.

1.10.3.

1. $p \vee q$
2. $r \vee \sim p$
3. $t \vee r \vee \sim q$
4. $p \to \sim t$
5. $t \to \sim q$

$\therefore r$

Bevis:

6. $p \to r$ (omskrivning av 2.)
7. $q \to \sim t$ (omskrivning av 5. (Det gäller alltid att $p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$).)
8. $\sim r$, antagande för indirekt härledning.
9. $\sim p$, 8, 2, *Disjunktiv syllogism*
10. q, 1, 9, *Disjunktiv syllogism*
11. $\sim t$, 7, 10, *Modus Ponens*
12. $r \vee \sim q$, 11, 3, *Disjunktiv syllogism*
13. $\sim q$, 12, 8, *Disjunktiv syllogism*
14. $\sim q \wedge q$. Motsägelse. Antagandet i 8 måste således vara falskt.
15. $\underline{r}$, 14, indirekt härledning.

Anmärkning: Detta var en svårare övning som kanske hörde hemma bland de blandade övningarna.

Blandade övningar

1.1 Sanningstabell för det logiska uttrycket $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee q$	$q \rightarrow \sim r$	$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$	$p \vee \sim r$
Sann	Sann	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann
Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann

Vi har tre hjälpkolumner, en för $\sim r$, en för $p \vee q$ och en för $q \rightarrow \sim r$. Vi har även lagt till en kolumn för $p \vee \sim r$ som används i nästa uppgift.

1.2 Den sista kolumnen i föregående tabell är sanningsvärdena hörande till $p \vee \sim r$. Frågan som ställs i uppgiften är huruvida vi kan dra slutsatsen $p \vee \sim r$ från $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$. För att vi ska kunna göra detta måste $p \vee \sim r$ följa av $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$, det vill säga det får aldrig inträffa att $p \vee \sim r$ har värdet falsk trots att $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$ är sann. Detta är aldrig i tabellen i föregående uppgift. Närhelst $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$ är sann så blir $p \vee \sim r$ varför $p \vee \sim r$ följer av $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$. Vi har indikerat de rader som detta gäller genom att stryka under de aktuella sanningsvärdena hos $p \vee \sim r$.

1.3 Skapa en sanningstabell för det logiska uttrycket $((p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge \sim (p \rightarrow r)$.

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \wedge \sim q$	$q \rightarrow \sim r$	$\vee$	$\sim (p \rightarrow r)$	$((p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge \sim (p \rightarrow r)$
S	S	S	F	F	F	F	F	F	F
S	S	F	F	S	F	S	S	S	S
S	F	S	S	F	S	S	S	F	F
S	F	F	S	S	S	S	S	S	S
F	S	S	F	F	F	F	F	F	F
F	S	F	F	S	F	S	S	F	F
F	F	S	S	F	F	S	S	F	F
F	F	F	S	S	F	S	S	F	F

Av uttrymmesskäl har vi förkortat notationen i ovanstående tabell. Åttonde kolumnen, rubricerad med ”$\vee$” innehåller sanningsvärden hörande till disjunktionen av de två föregående kolumnerna. Således står ”$\vee$” för ”$(p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow \sim r)$”. Vidare har vi valt att i kolumnen rubricerad med $\sim (p \rightarrow r)$ direkt ge sanningsvärdena för $\sim (p \rightarrow r)$ utan mellanledet $p \rightarrow r$. Sista kolumnen ge så sanningsvärdena för $((p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge \sim (p \rightarrow r)$ vilket var det som eftersöktes.

1.4 I föregående sanningstabell har vi strukit under de rader där $((p\wedge \sim q)\vee(q \to\sim r))\wedge \sim (p \to r)$ i kolumnen för p. På dessa rader har p värdet sann varför vi drar slutsatsen $((p\wedge \sim q)\vee(q \to\sim r))\wedge \sim (p \to r) \Rightarrow p$.

1.5 Skapa en sanningstabell för det logiska uttrycket $((p \to q) \to (r\wedge \sim s)) \to (\sim p\wedge \sim r)$.

pqrs$\underline{\text{prs}}$	$p \to q$	$r\wedge \sim s$	$(p \to q) \to (r\wedge \sim s)$	$\sim p\wedge \sim r$	$((p \to q) \to (r\wedge \sim s)) \to (\sim p\wedge \sim r)$
SSSSFFF	$\underline{\text{S}}$	F	F	F	S
SSSFFFS	S	S	S	F	F
SSFSFSF	$\underline{\text{S}}$	F	F	F	S
SSFFFSS	$\underline{\text{S}}$	F	F	F	S
SFSSFFF	F	F	S	F	F
SFSFFFS	F	S	S	F	F
SFFSFSF	F	F	S	F	F
SFFFFSS	F	F	S	F	F
FSSSSFF	$\underline{\text{S}}$	F	F	F	S
FSSFSFS	S	S	S	F	F
FSFSSSF	$\underline{\text{S}}$	F	F	S	S
FSFFSSS	$\underline{\text{S}}$	F	F	S	S
FFSSSFF	$\underline{\text{S}}$	F	F	F	S
FFSFSFS	S	S	S	F	F
FFFSSSF	$\underline{\text{S}}$	F	F	S	S
FFFFSSS	$\underline{\text{S}}$	F	F	S	S

1.6 Vi har här komprimerat kolumnerna för p, q, r, s, ~ p, ~ r och ~ s till en kolumn. Den är rubricerad pqrs$\underline{\text{prs}}$ där de sista tre utsagorna är understrukna för att indikera att det är negationerna vi studerar.

Slutsatsen $((p \to q) \to (r\wedge \sim s)) \vee (\sim p\wedge \sim r) \Rightarrow p \to q$ nu eftersom $p \to q$ alltid blir sann då $((p \to q) \to (r\wedge \sim s)) \vee (\sim p\wedge \sim r)$. Vi har markerat de rader i kolumnen för $p \to q$ som indikerar detta.

1.7. Sanningstabell för $(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim (q \wedge \sim r)$.

pqrpr	$\sim p \vee q$	$p \vee (\sim p \vee q)$	$q \wedge \sim r$	$\sim (q \wedge \sim r)$	$(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim (q \wedge \sim r)$
SSSFF	S	S	F	S	S
SSFFS	S	S	S	F	F
SFSFF	F	S	F	S	S
SFFFS	F	S	F	S	S
FSSSF	S	S	F	S	S
FSFSS	S	S	S	F	F
FFSSF	S	S	F	S	S
FFFSS	S	S	F	S	S

Vi observerar att kolumnen för $p \vee (\sim p \vee q)$ bara innehåller S. Utsagan $p \vee (\sim p \vee q)$ är alltså alltid sann. Det betyder att kolumnen för $(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim (q \wedge \sim r)$ kommer att överenstämma med kolumnen för $\sim (q \wedge \sim r)$ eftersom $(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim (q \wedge \sim r)$ är en konjunktion mellan $\sim (q \wedge \sim r)$ och den alltid sanna utsagan $p \vee (\sim p \vee q)$.

(Från tentamen i diskret matematik den 28 augusti 2000.)

1.8. Slutledningen är korrekt och leden visas undertill.

1. $p \to q$
2. $q \to \sim p$
3. $p \vee r \vee s$
4. $s \to t$
5. $t \to (\sim s \vee p)$

$\therefore r$

6. $p \to \sim p$, följer av 1, 2 och hypotetisk syllogism.
7. $\sim p \vee \sim p$, omskrivning av 6.
8. $\sim p$, följer av 7 och idempotens.
9. $r \vee s$, följer av 8, 3 och disjuktiv syllogism.
10. $\sim r$, antagande för indirekt härledning.
11. s, följer av 9, 10 och disjuktiv syllogism.
12. t, följer av 11, 4 och modus ponens.
13. $\sim s \vee p$, följer av 12, 5 och modus ponens.
14. $\sim s$, följer av 13, 8 och disjuktiv syllogism.
15. $\sim s \wedge s$, följer av 11, 14. Detta är en motsägelse.
16. $\underline{r}$, följer av 15 och indirekt härledning. Detta skulle bevisas.

1.9 Slutledningen

1. $\sim s \wedge q$
2. $p \wedge q \rightarrow r$
3. $s \vee \sim r$

$\therefore \sim p$

är korrekt och följer genom följande bevis:

4. $\sim s$, följer av 1 och konjunktiv förenkling.
5. $\sim r$, följer av 4, 3 och disjuktiv syllogism.
6. $\sim (p \wedge q)$, följer av 5, 2 och modus tollens.
7. $\sim p \vee \sim q$, följer av 6 och DeMorgans lag.
8. q, följer av 1 och konjunktiv förenkling.
9. $\underline{\sim p}$, följer av 8, 7 och disjuktiv syllogism. Detta skulle visas.

1.10 Härledningen

1. $p \rightarrow q \vee r$
2. $p \vee \sim q$
3. $r \vee q$

$\therefore q$

är *inte* korrekt. Vi inser det genom att bilda en sanningstabell med var och en av premisserna:

p	q	r	$\sim q$	$r \vee q$	$p \rightarrow q \vee r$	$p \vee \sim q$
Sann	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Sann	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann
Sann	<u>Falsk</u>	Sann	Sann	<u>Sann</u>	<u>Sann</u>	<u>Sann</u>
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Falsk
Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann

Vi kan studera till exempel den tredje raden. Här är alla premisser uppfyllda, men trots detta är det vi hävdar är slutsatsen (q) inte sann. En tilldelning av sanningsvärden till p, q och r som alltså uppfyller premisserna men inte slutledningen skulle således blir: p = sann, q = falsk och r = sann.

1.11 Slutledningen

1. $p \vee q$
2. $q \vee r$
3. $p \vee r$
4. $p \rightarrow s$

$\therefore q \vee s$

är korrekt och den följer genom beviset:

5. $\sim(q \vee s)$ antagande av motsatsen till $q \vee s$ för indirekt härledning.
6. $\sim q \wedge \sim s$, omskrivning av 5 med DeMorgans lag.
7. $\sim q$, följer av 6 och konjunktiv förenkling.
8. p, följer av 1, 7 och disjuktiv syllogism.
9. s, följer av 8, 4 och modus ponens.
10. $\sim s$, följer av 6 och konjunktiv förenkling.
11. $s \wedge \sim s$, följer av 9 och 10. Detta är en motsägelse.
12. $q \vee s$ 11 och indirekt härledning. Detta var vad som skulle visas.

1.12 Härledningen

1. $p \vee q$
2. $q \rightarrow r$
3. $p \wedge s \rightarrow t$
4. $\sim r$
5. $\sim q \rightarrow s$

$\therefore t$.

är riktig och följer genom beviset:

6. $\sim q$, följer av 4, 2 och modus tollens.
7. s, följer av 5, 6 och modus ponens.
8. p, följer av 6, 1 och disjuktiv syllogism.
9. $p \wedge s$, följer av 7, 8 och konjunktiv addition.
10. $\underline{t}$, följer av 9, 3 och modus ponens. Detta var vad som skulle bevisas.'

1.13 Härledningen

1. $p \to (q \wedge r)$
2. $q \to (r \wedge s)$
3. $s \to r$
4. $r \to \sim s$

$\therefore \sim p$

är korrekt och följer av nedanstående bevis:

5. $s \to \sim s$, följer av 3, 4 och hypotetisk syllogism.
6. $\sim s \vee \sim s \Leftrightarrow \sim s$, omskrivning av 5. (Enligt $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.)
7. $\sim s \vee \sim r \Leftrightarrow \sim (s \wedge r)$, följer av 6 och disjunktiv addition och DeMorgans lag.
8. $\sim q$, följer av 2, 7 och modus tollens.
9. $\sim q \vee \sim r \Leftrightarrow \sim (q \wedge r)$, följer av 8 och disjuntiv addition och DeMorgans lag.
10. $\sim p$, följer av 9, 1 och modus tollens.

1.14 Slutledningen är korrekt. (Lösning saknas.)

1.15 Slutledningen är inte korrekt. (Lösning saknas.)

1.16 Slutledningen är korrekt. (Lösning saknas.)

1.17 Vi tar bort premiss 4 ($\sim s$) från nedanstående härledning:

1. $p \vee r$
2. $p \to r$
3. $r \to s$
4. $\sim s$
5. $s \to q$

$\therefore q$

och får då härledningen

1. $p \vee r$
2. $p \to r$
3. $r \to s$
4. $s \to q$

$\therefore q$

som är korrekt. Den följer genom av följande bevis:

5. $\sim r$, antagande för indirekt härledning.
6. p, följer av 1, 5 och disjunktiv syllogism.
7. r, följer av 6, 2 och modus ponens.
8. $\sim r \vee r$, följer av 5 och 7. Detta är en motsägelse.
9. r, följer av 8, 5 och indirekt härledning.
10. s, följer av 3, 9 och modus ponens.
11. q, följer av 4, 10 och modus ponens. Detta var vad som skulle visas.