Övningar till kapitel 2 Mängdlära

2.1 Mängden

2.1.1 Låt $\boldsymbol{Z}$ beteckna mängden av alla heltal. Vilka mängder är lika?

$$M_1 = \{0,2,4,6,...\}$$
$$M_2 = \{1,3,5,...\}$$
$$M_3 = \{0,5,10,15,...\}$$
$$M_4 = \textit{Mängden av alla udda heltal}$$
$$M_5 = \textit{Mängden av alla positiva heltal, inklusive } 0$$
$$M_6 = \{2k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$$
$$M_7 = \{2k \mid k \in \boldsymbol{Z} \textit{ och } k \geq 0\}$$
$$M_8 = \{2k+1 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$$
$$M_9 = \{2k+1 \mid k \in \boldsymbol{Z} \textit{ och } k \geq 0\}$$
$$M_{10} = \{5n \mid n \in \boldsymbol{Z} \textit{ och } n \geq 0\}$$
$$M_{11} = \textit{Mängden av alla jämna heltal}$$

2.2 Union

2.2.1.Låt följande mängder vara givna:

$$A = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$
$$B = \{x \mid x \textit{ är udda heltal eller } x \textit{ är jämnt \& positivt}\}$$
$$C = \{x \mid x \textit{ är udda \& positivt eller } x \textit{ är ett jämnt heltal}\}$$
$$D = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Uttryck A, B, C och D som unioner av mängderna $M_1 - M_{11}$ i uppgift 2.1.1.

2.3.Snitt

2.3.1. Ange följande mängder med klammernotation:

$$M_1 \cap M_2, M_1 \cap M_3, M_1 \cap M_4, M_1 \cap M_{10},$$
$$M_2 \cap M_7, M_2 \cap M_8, M_2 \cap M_{10}, M_2 \cap M_{11}$$

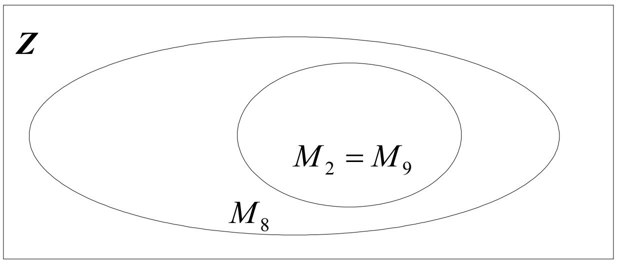
Om någon av dem är tomma mängden, ange det.

2.4. Delmängd

2.4.1. Ange vilka delmängdsförhållanden som finns mellan mängderna $M_1 - M_{11}$ i uppgift 2.1.1. (Till exempel gäller $M_1 \subset M_5$.)

2.5. Venndiagram och universum

Universum för mängderna $M_1 - M_{11}$ i uppgift 2.1.1 är mängden av alla hela tal, det vill säga . $\boldsymbol{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$. Illustrera delmängdsförhållandena från övning 2.4.1 i Venndiagram. Exempelvis gäller $M_2 = M_9 \subset M_8$ vilket i ett Venndiagram illustreras så här:



2.9. Mängdlagar

2.9.1. Visa följande lagar med Venndiagram:

1. Associativa lagarna med union: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
2. Distributiva lagarna: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ samt $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. Lagen om dubbla komplementet: $(A^c)^c = A$.
5. Idempotens: $A \cup A = A$ samt $A \cap A = A$.
6. DeMorgans lagar: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ samt $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
7. Absorptionslagarna: $A \cup (A \cap B) = A$ samt . $A \cap (A \cup B) = A$.

2.9.2. Studera med Venndiagram följande två lagar: $A \subset B \wedge B \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap C = \varnothing$ och $C \subset A \cup B \wedge A \cap B \cap C = \varnothing \Rightarrow C \cap A = \varnothing \vee C \cap B = \varnothing$. En av dem gäller, en av dem gäller inte. Vilken gäller och vilken gäller inte? Motivera med Venndiagram. För den lagen som inte gäller, exemplifiera med tre mängder *A*, *B* och *C* som inte uppfyller regeln.

2.9.3. Låt *A*, *B* och *C* vara godtyckliga mängder. För varje påstående, avgör om det är sant eller falskt. Om det är sant, visa det genom att rita ett Venndiagram för höger och vänster led. Om det är falskt ge ett motexempel genom att ange mängder *A*, *B* och eventuellt *C* för vilka påståendet inte gäller.

a) $(A - B)^c = (B - A)^c$.

b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

(Från tentamen i diskret matematik den 11 januari 2001.)

2.9.4. Ange med mängdsymboler (A, B, C, union-, snitt- och mängddifferenstecken) vilka mängderna är som är symboliserade i nedanstående Venndiagram:

Diagram 1

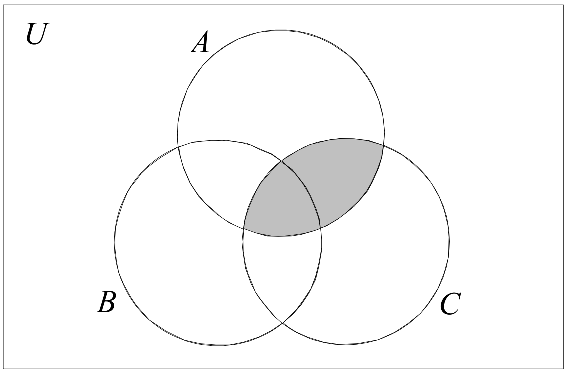


Diagram 2

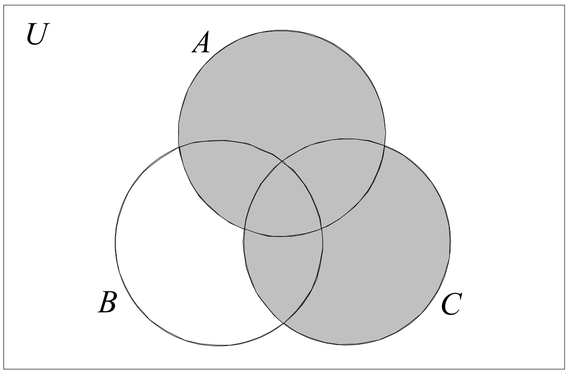


Diagram 3

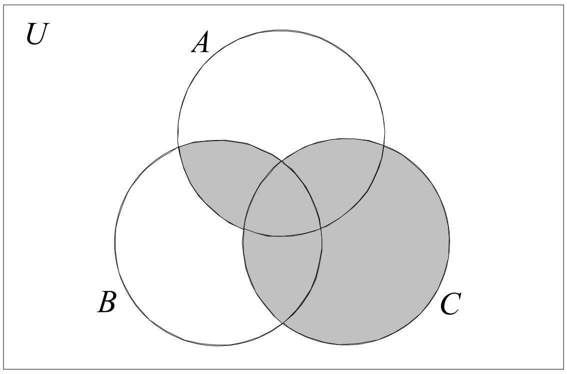


Diagram 4

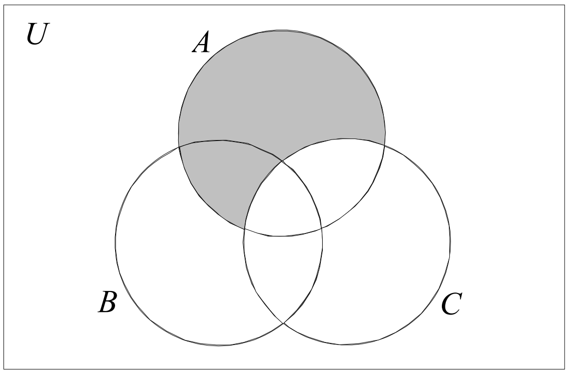


Diagram 5

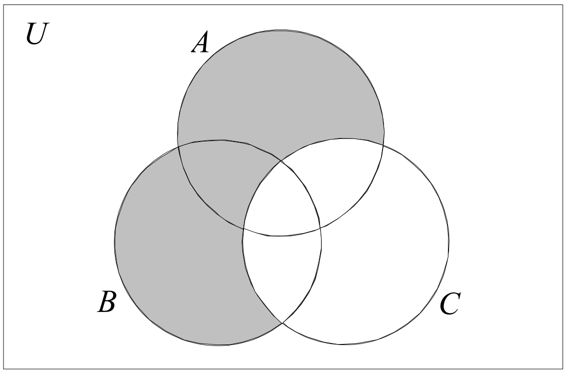


Diagram 6

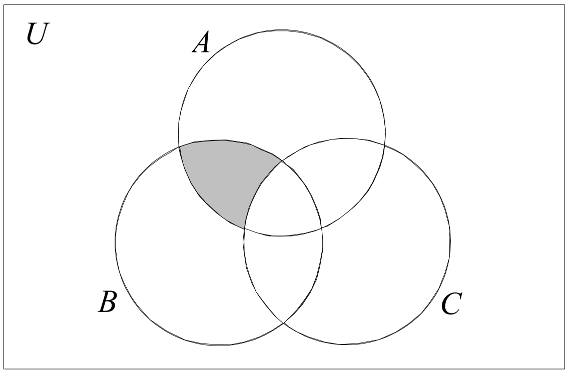


Diagram 7

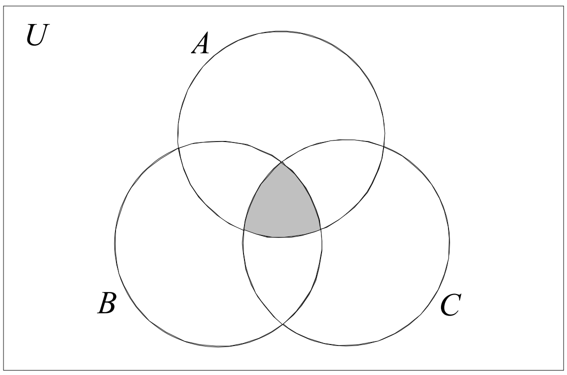
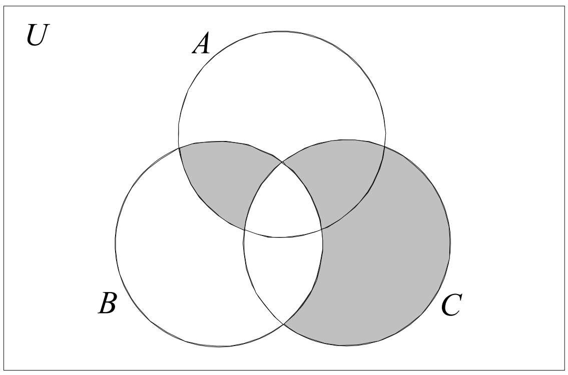


Diagram 8



2.10 Kryssprodukter

2.10.1. Låt mängderna A = {1, 2, 3, 4}, B = {10, 20} och C = {100, 200, 300} vara givna. Ange följande tre mängder genom att räkna upp deras element: $A\times B$, $A\times C$, $(A\times B)\times C$, $A\times(B\times C)$, $A\times B\times C$. Gäller $(A\times B)\times C = A\times(B\times C) = A\times B\times C$? Varför? Varför inte?

2.11 Antal element i en mängd

2.11.1. Låt mängderna A, B och C vara givna som i föregående uppgift. Ange $|A\times B|$, $|A\times C|$, $|(A\times B)\times C|$ och $|A\times B\times C|$.

2.12 Predikat och kvantorer

2.12.1. Låt mängderna A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8} och C = {1, 2, 4, 8} vara givna, Ange sanningsvärdet av följande tre utsagor. Ange även varför utsagan är sann eller falsk. Om en utsaga är falsk, ta bort element från mängderna *A*, *B* och *C* så att utsagan blir sann. Då element tas bort från mängderna *A*, *B* och *C* ska det vara så få element som möjligt som tas bort.

Utsaga 1: $\forall x\in B:\exists y\in A: x=2\cdot y$.

Utsaga 2: $\forall x\in C:\exists y\in A: x=2\cdot y$.

Utsaga 3: $\exists x\in C:\exists y\in A: x=2\cdot y$.

Utsaga 4: $\exists x\in C:\forall y\in A: x=2\cdot y$.

Utsaga 5: $\forall x\in C:\forall y\in A: x=2\cdot y$.

2.12.2. Formulera negationerna till varje utsaga från föregående övningsuppgift.

2.12.3. I linjär algebra kan man ibland finna att en linje är innesluten i ett plan. Så är till exempel fallet med linjen med parameterframställningen $t\rightarrow(t,-2t,t)$ som ligger helt innesluten i planet med ekvationen $x+y+z=0$. Om vi betecknar rummet av alla punkter med $R\times R\times R=R^3$ och mängden av alla punkter i planet med *M* och mängden av alla punkter på linjen med *L* så gäller följande mängdrelation: $L\subset M\subset R^3$. Att en punkt *P* finns på linjen kan då skrivas så här: $P\in L\Leftrightarrow\exists t:P=(t,-2t,t)$. Det vill säga punkten *P* ligger på linjen *L* om det finns ett parametervärde *t* som vid insättning i formeln hörande till parameterframställningen av *L* ger oss punkten *P*. Planets parameterframställning ges av $P\in M\Leftrightarrow\exists s\exists t:P=(-s-t,s,t)$. Vilka av utsagor är sanna och vilka är falska?

1. $\forall P\in L:\exists s\exists t:P=(-s-t,s,t)$.
2. $\forall P\in M:\exists t:P=(t,-2t,t)$
3. $\exists P\in M:\exists t:P=(t,-2t,t)$
4. $\exists P\in R^3:\exists t:P=(t,-2t,t)$ och $\exists P\in R^3:\exists s\exists t:P=(-s-t,s,t)$
5. $\exists P\in M:\forall t:P=(t,-2t,t)$
6. $\exists P\in M:\sim(\forall t:P=(t,-2t,t))$ och $\exists P\in M:\sim(\exists t:P=(t,-2t,t))$

Ge geometriska tolkningar av dessa utsagor och förklara varför de är sanna eller falska.

Blandade övningar

(Blandade övningar är av tentamenskaraktär)

2.1. Ange uttryck med mängdsymboler, *A*, *B*, *C* och union-, snitt- och mängddifferenstecken för mängderna symboliserade i följande Venndiagram:

Diagram 1

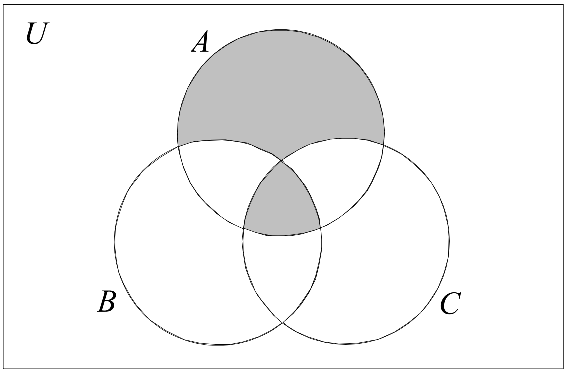


Diagram 2

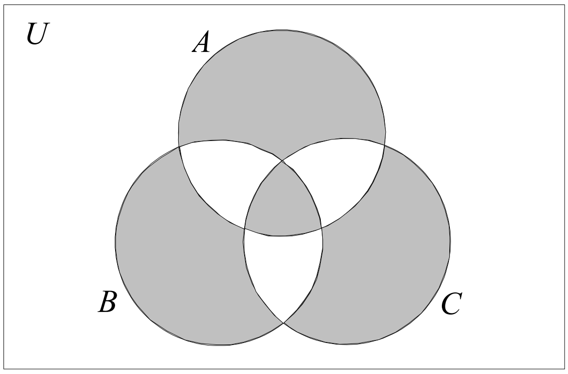


Diagram 3

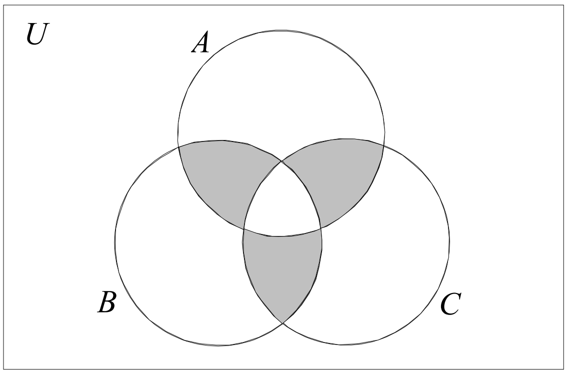
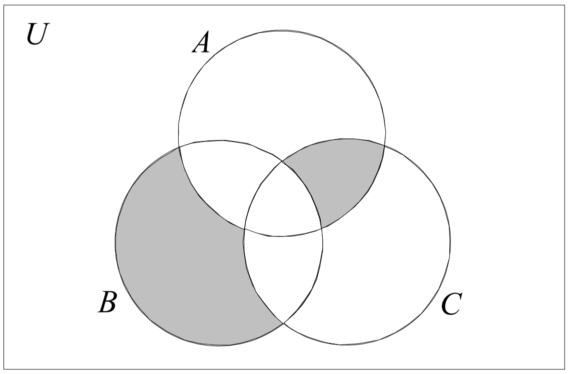


Diagram 4



2.2. Låt *A* och *B* vara mängder i ett universum *U*. Rita mängderna $A-(A-B)$ och $B-(B-A)$ i två Venndiagram. Hur är relationen mellan dessa två mänder? Kan du skriva dessa mängder med en annan symbol?

2.3. Låt *A* och *B* vara mängder i ett universum *U*. Den symmetriska differensen mellan *A* och *B* defineras då som $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$.

a) Illustrera $A \oplus B$ i ett Venndiagram.

b) Förenkla $A \oplus \varnothing$, $A \oplus A$, $A \oplus U$, $A \oplus A^c$.

c) Visa med Venndiagram att $\oplus$ är associativ, det vill säga visa att $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ för alla mängder *A*, *B* och *C*.

2.4. Med ett elementargument menas en form av bevis av att mängder är lika via klammernotation. För mängder *A* och *B* i ett universum *U* kan vi till exempel skriva $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Här ser vi tydligt hur konjunktion kopplas ihop med snitt. Vi har vidare $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$ som visar hur union och disjunktion är relaterade och för komplementet gäller $A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$. Vi kan nu bevisa DeMorgans lag för mängder direkt med klammernotation och med DeMorgans lag för utsagor: $(A\cup B)^c = \{x\in U \mid x\notin A\cup B\}$. Om vi nu arbetar med utsagan som definierar kravet på elementen i $(A\cup B)^c$ nämligen $x\notin A\cup B$ så får vi $x\notin A\cup B \Leftrightarrow \sim(x\in A\cup B) \Leftrightarrow \sim(x\in A \vee x\in B)$. Den sista utsagan är nu en negation av en disjunktion. Den omformar vi med hjälp av DeMorgans lag för utsagor och får $\sim(x\in A\vee x\in B) \Leftrightarrow \sim(x\in A)\wedge \sim(x\in B)$. Detta är samma sak som $x\notin A\wedge x\notin B \Leftrightarrow x\in A^c \wedge x\in B^c$. Vi har således $(A\cup B)^c = \{x\in U \mid x\notin A\cup B\} = \{x\in U \mid x\in A^c \wedge x\in B^c\}$. Men detta är ingenting annat än $A^c\cap B^c$. Vi har således visat att $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.

Visa följande mängdidentiteter med elementargument:

1. Andra varianten av DeMorgans lag, det vill säga $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.

2. Visa att union och snitt är associativa med hjälp av elementargument. (Det vill säga, visa för alla mängder *A*, *B* och *C* att $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ och samma sak för $\cap$.)

3. Konstruera också bevis för distributiva lagarna, absorptionslagarna och idempotens.

2.5. Visa, antingen med ett elementargument eller med vanlig mängdalgebra, mängdidentiteten $(A\cap B)-(C\cup D) = (A-C)\cap(B-D) = (A-D)\cap(B-C)$.

2.6. Visa, antingen med ett elementargument eller med vanlig mängdalgebra, mängdrelationen $(A\cup B)-(C\cup D)\subset(A-C)\cup(B-D)$. Vad kan du säga om $(A\cup B)-(C\cup D)$ och $(A-D)\cup(B-C)$? *(Från tentamen i diskret matematik, datum okänt.)*

2.7. Låt *i*(*x*) vara predikatet ”*x* är intressant” och låt *D* vara domänen av alla frågor. Teckna, med kvantorer följande utsagor:

1. Alla frågor är intressanta.
2. För alla frågor gäller att de inte är intressanta.
3. Det finns en fråga som är intressant.
4. Det finns ingen fråga som är intressant.
5. Det är inte alla frågor som är intressanta.
6. Det finns en fråga som inte är intressant.
7. Det finns inte en enda fråga som inte är intressant.
8. Det är inte alla frågor som inte är intressanta.

Man kan para ihop dessa utsagor två och två i par av ekvivalenta utsagor. Ange hur. *(Exempel: 1 och 7 är ekvivalenta.)*

2.8. En person *A* säger till en person *B*: ”Angående dig så kan man knappast säga att det inte är någon större brist på okunnighet som saknas.” Var detta en komplimang? (Ledning: Lagen om dubbel negation säger att $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ för alla utsagor *p*.)

2.9. Avgör om regeln $A-(A-B)=A\cap B$ är sann eller inte. Om den är sann, ge ett bevis med Venndiagram eller med formelmanipulation. Om den inte är sann ange ett exempel på två mängder *A* och *B* som inte uppfyller regeln.

2.10. Avgör om regeln $A\cap(B\cup C)\subset B\cup(A\cap C)$ är sann eller inte. Om den är sann, ge ett bevis med Venndiagram eller med formelmanipulation. Om den inte är sann ange ett exempel på tre mängder *A, B* och *C* som inte uppfyller regeln.

Facit till övningar i kapitel 2: mängdlära

2.1.1. $M_1 = M_7$, $M_2 = M_9$, $M_3 = M_{10}$, $M_4 = M_8$, $M_6 = M_{11}$.

2.2.1.

$A = \{0, 1, 2, 3, ...\} = M_5 = M_1 \cup M_2$

$B = \{x \mid x \text{ är udda heltal eller } x \text{ är jämnt heltal}\} = M_4 \cup M_1$

$C = \{x \mid x \text{ är udda \& positivt eller } x \text{ är ett jämnt heltal}\} = M_2 \cup M_6$

$D = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} = \{\text{Alla heltal}\} = M_4 \cup M_{11}$

Anmärkning eftersom $M_4 = M_8$ duger M_8 lika bra i uttrycken ovan som M_4. Samma gäller för övriga mängdidentiteter $M_1 = M_7$, $M_2 = M_9$, $M_3 = M_{10}$ och $M_6 = M_{11}$.

2.3.1.

$M_1 \cap M_2 = \varnothing$

$M_1 \cap M_3 = \{x \mid (x = 2 \cdot k \vee x = 5 \cdot k) \wedge k \in \boldsymbol{Z}\}$

$M_1 \cap M_4 = \varnothing$

$M_1 \cap M_{10} = \text{samma som } M_1 \cap M_3$

$M_2 \cap M_7 = M_2 \cap M_1 = \varnothing$

$M_2 \cap M_8 = \{2k + 1 \mid k \in \boldsymbol{Z} \wedge k \geq 1\}\ (= M_2)$

$M_2 \cap M_{10} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x = 5 \cdot (2k + 1) \wedge k \in \boldsymbol{Z} \wedge k \geq 0\}$

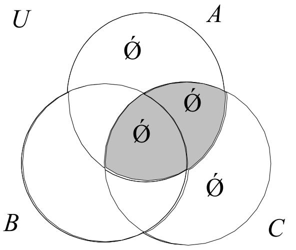
$M_2 \cap M_{11} = \varnothing$

2.4.1. Eftersom $M_1 = M_7$, $M_2 = M_9$, $M_3 = M_{10}$, $M_4 = M_8$, $M_6 = M_{11}$ stryks mängderna $M_7 - M_{11}$ från listan och uppgiften besvaras för mängderna $M_1 - M_6$. Här gäller följande delmängdsförhållanden: $M_1 \subset M_5$, $M_1 \subset M_6$ och $M_2 \subset M_4$.

2.5.1 Delmängdsförhållandena är $M_1 \subset M_5$, $M_1 \subset M_6$ och $M_2 \subset M_4$. Vilka illustreras enligt figur 1.1 med M_1 som *A* och M_5 som *B* i första diagrammet, M_1 som *A* och M_6 som *B* i andra diagrammet och M_2 som *A* och M_4 som *B* i tredje diagrammet.

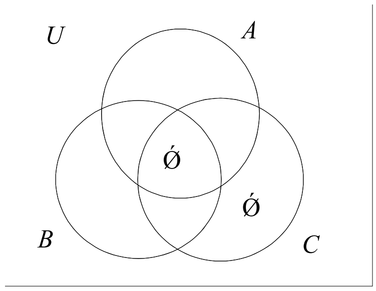
2.9.1. Facit saknas, för metodik, se bevis av satserna 2.1 och 2.2.

2.9.2. $A \subset B \wedge B \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap C = \varnothing$ är sann och motiveras av nedanstående Venndiagram:

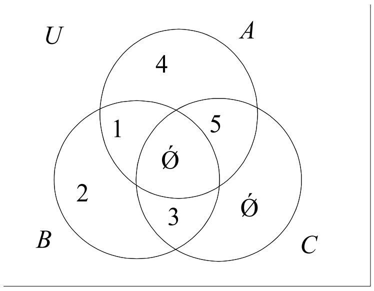


I detta diagram ser vi att snittet mellan *A* och *C* är tomt. De övre två tommamängdstecknena kommer av första premissen, $A \subset B$ och de undre två tomma mängdstecknena kan vi sätta dit på grund av den andra premissen $B \cap C = \varnothing$. Sammantaget ger det att $A \cap C = \varnothing$.

$C \subset A \cup B \wedge A \cap B \cap C = \varnothing \Rightarrow C \cap A = \varnothing \vee C \cap B = \varnothing$ är inte sann. Vi motiverar det genom att studera följande Venndiagram:

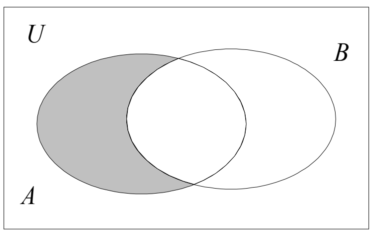


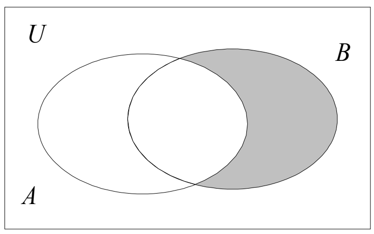
Det mittersta tomma mängdstecknet kan vi sätta dit på grund av $A \cap B \cap C = \varnothing$ och tommamängdstecknet nedåt till höger kan vi sätta dit på grund av $C \subset A \cup B$. Emellertid ser vi att detta inte tömmer hela snitten mellan *C* och *B* respektive mellan *C* och *A*. Det betyder att det kan finnas element i $(C \cap A) - B$ eller $(C \cap B) - A$. Exempel på mängder som inte uppfyller denna regel skulle kunna anges av nedanstående Venndiagram:



Det vill säga av mängderna *A* = { 1, 4, 5 }, *B* = {1, 2, 3} och *C* = { 3, 5 }.

2.9.3. $(A-B)^c = (B-A)^c$. Komplementen till två mängder är lika om och endast om mängderna är lika så vi får $(A-B)^c = (B-A)^c \Leftrightarrow A-B = B-A$. Men följande Venndiagram visar att dessa mängder inte alls måste vara lika:





Venndiagram för *A* – *B*.

Venndiagram för *B* – *A*.

Vi kan till exempel bilda $A = \{ 1, 2 \}$ och $B = \{ 2, 3 \}$. Då har vi $A - B = \{1\}$ och $B - A = \{3\}$. Således blir komplementen till dessa mängder också olika. Regeln gäller inte.

b) Facit saknas, men tekniken är samma som i de förra uppgifterna. Denna regel stämmer dock.

2.9.4.

Diagram 1 Detta är $A \cap C$.

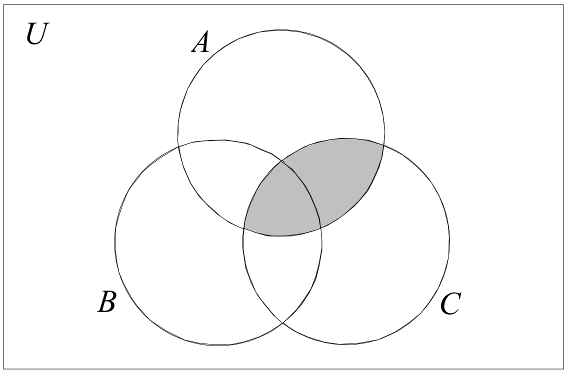


Diagram 2 Detta är $A \cup C$

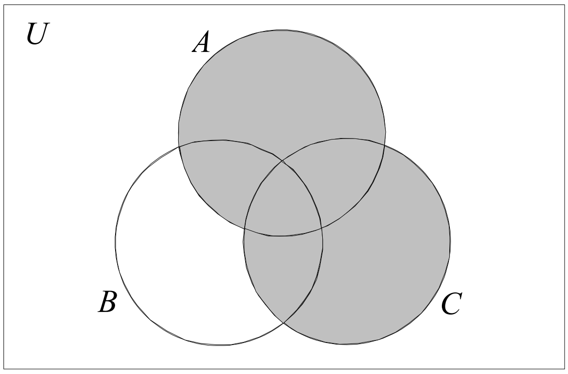


Diagram 3 Detta är $(A \cap B) \cup C$

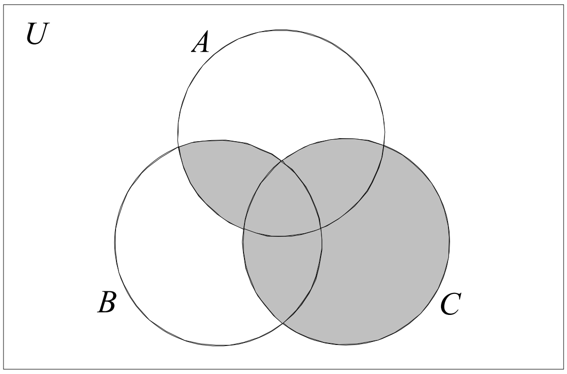


Diagram 4 Detta är $A - C$.

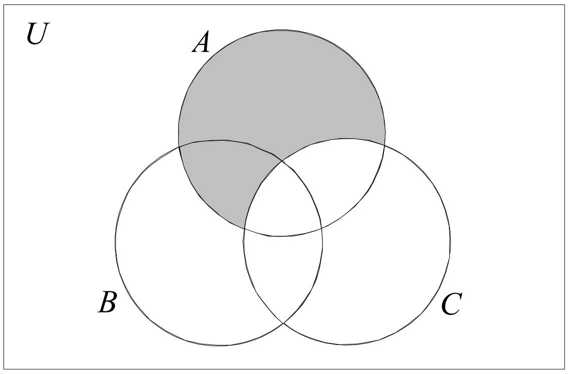


Diagram 5 Detta är $(A \cup B) - C$.

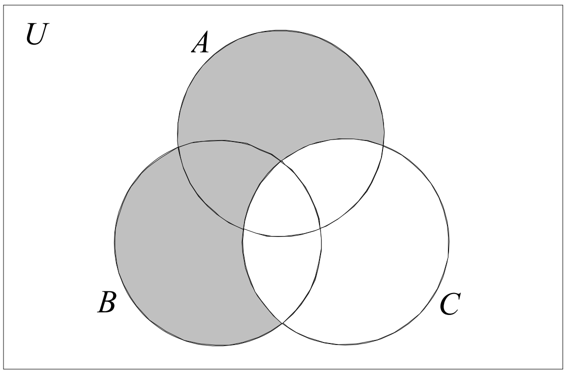


Diagram 6 Detta är $(A \cap B) - C$.

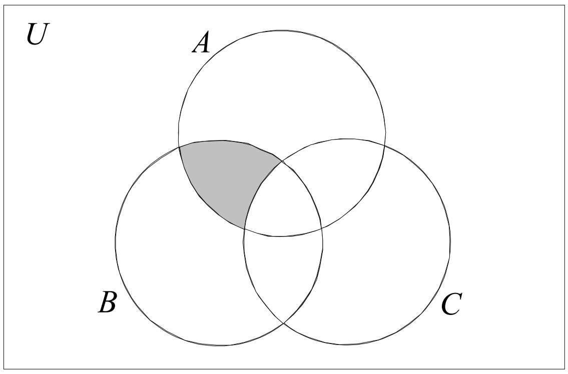


Diagram 7 Detta är $A \cap B \cap C$.

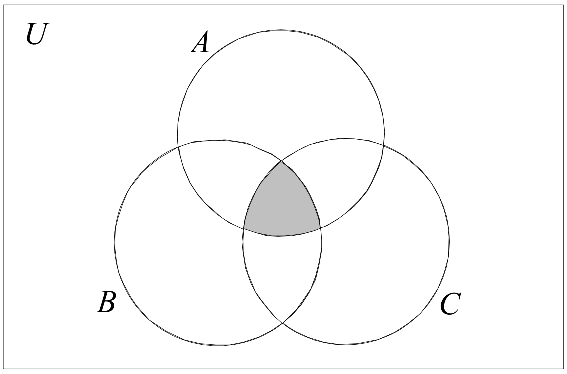
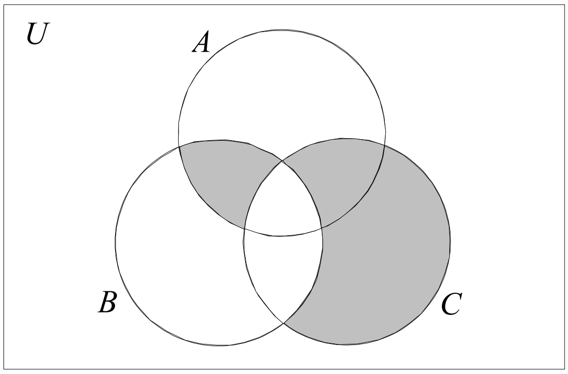


Diagram 8 Detta är $(A \cap B) \cup C - (B \cap C)$.



2.10 Kryssprodukter

2.10.1.

$A \times B$ = { (1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10), (1, 20), (2, 20), (3, 20), (4, 20)}.

$A \times C$ = { (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6),
(1, 7), (2, 7), (3, 7), (4, 7) }.

$(A \times B) \times C$ =

{ ((1, 10), 5), ((2, 10), 5), ((3, 10), 5), ((4, 10), 5), ((1, 20), 5), ((2, 20), 5), ((3, 20), 5), ((4, 20), 5),
((1, 10), 6), ((2, 10), 6), ((3, 10), 6), ((4, 10), 6), ((1, 20), 6), ((2, 20), 6), ((3, 20), 6), ((4, 20), 6),
((1, 10), 7), ((2, 10), 7), ((3, 10), 7), ((4, 10), 7), ((1, 20), 7), ((2, 20), 7), ((3, 20), 7), ((4, 20), 7) }.

$A \times (B \times C)$ =

{ (1, (10, 5)), (2, (10, 5)), (3, (10, 5)), (4, (10, 5)), (1, (20, 5)), (2, (20, 5)), (3, (20, 5)), (4, (20, 5)),
(1, (10, 6)), (2, (10, 6)), (3, (10, 6)), (4, (10, 6)), (1, (20, 6)), (2, (20, 6)), (3, (20, 6)), (4, (20, 6)),
(1, (10, 7)), (2, (10, 7)), (3, (10, 7)), (4, (10, 7)), (1, (20, 7)), (2, (20, 7)), (3, (20, 7)), (4, (20, 7)) }.

$A \times B \times C$ =

{ (1, 10, 5), (2, 10, 5), (3, 10, 5), (4, 10, 5), (1, 20, 5), (2, 20, 5), (3, 20, 5), (4, 20, 5),
(1, 10, 6), (2, 10, 6), (3, 10, 6), (4, 10, 6), (1, 20, 6), (2, 20, 6), (3, 20, 6), (4, 20, 6),
(1, 10, 7), (2, 10, 7), (3, 10, 7), (4, 10, 7), (1, 20, 7), (2, 20, 7), (3, 20, 7), (4, 20, 7) }.

Inga av likheterna $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$ eftersom $A \times B \times C$ består av tripplar och $(A \times B) \times C$ och $A \times (B \times C)$ består av par. Vidare gäller inte $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ eftersom den första komponenten i paren hos $(A \times B) \times C$ är par (till exempel (1, 10)) medan den första komponenten hos $A \times (B \times C)$ är tal (något av talen 1, 2, 3 och 4.)

2.11.1. $|A \times B| = 8$, $|A \times C| = 12$, $|(A \times B) \times C| = |A \times B \times C| = 24$.

2.12.1. Låt mängderna A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8} och C = {1, 2, 4, 8} vara givna, Ange sanningsvärdet av följande tre utsagor. Ange även varför utsagan är sann eller falsk. Om en utsaga är falsk, ta bort element från mängderna A, B och C så att utsagan blir sann. Då element tas bort från mängderna A, B och C ska det vara så få element som möjligt som tas bort.

A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8} och C = {1, 2, 4, 8}

Utsaga 1: $\forall x \in B : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$. Sant ty *B* består av alla tal i *A* multiplicerade med 2.
Utsaga 2: $\forall x \in C : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$. Falskt ty talet 1 i *C* är inte en multipel av 2.
Utsaga 3: $\exists x \in C : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$. Sant, det finns till exempel talet 2 i C som är 2 * 1 och y = 1 finns i A.
Utsaga 4: $\exists x \in C : \forall y \in A : x = 2 \cdot y$. Falskt. Vi hävdar här att det finns ett tal *x* i *C* som alltid är lika med 2 * *y*, och att detta ska gälla för alla *y* i *A*.
Utsaga 5: $\forall x \in C : \forall y \in A : x = 2 \cdot y$. Också falskt. Här hävdar vi samma sak som i utsaga 4, men kravet ställs ännu högre, det som inte gällde för något enda tal, sägs här nu gälla för alla tal. No Way!

2.12.2. Formulera negationerna till varje utsaga från föregående övningsuppgift.

U1: $\forall x \in B : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$. Negation: $\sim (\forall x \in B : \exists y \in A : x = 2 \cdot y) \Leftrightarrow \exists x \in B : \forall y \in A : x \neq 2y$.
U2: $\forall x \in C : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$. Negation: $\sim (\forall x \in C : \exists y \in A : x = 2 \cdot y) \Leftrightarrow \exists x \in C : \forall y \in A : x \neq 2 \cdot y$.
U3: $\exists x \in C : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$. Negation: $\sim (\exists x \in C : \exists y \in A : x = 2 \cdot y) \Leftrightarrow \forall x \in C : \forall y \in A : x \neq 2 \cdot y$
U4: $\exists x \in C : \forall y \in A : x = 2 \cdot y$. Negation: $\sim (\exists x \in C : \forall y \in A : x = 2 \cdot y) \Leftrightarrow \forall x \in C : \exists y \in A : x \neq 2 \cdot y$
U5: $\forall x \in C : \forall y \in A : x = 2 \cdot y$. Negation: $\sim (\forall x \in C : \forall y \in A : x = 2 \cdot y) \Leftrightarrow \exists x \in C : \exists y \in A : x \neq 2 \cdot y$

2.12.3.

1. $\forall P \in L : \exists s \exists t : P = (-s - t, s, t)$.
Sant. Vi hävdar här att alla punkter på linjen kan framställas på formen $(-s - t, s, t)$, och eftersom linjen *L* ligger i planet och alla punkter i planet kan framställas på formen $(-s - t, s, t)$ kan alltså *s* och *t* väljas så att punkterna på linjen får framställningen $(-s - t, s, t)$.

2. $\forall P \in M : \exists t : P = (t, -2t, t)$.
Falskt. Vi hävdar här att alla punkter i planet ligger på linjen, men det finns punkter i planet som inte ligger på linjen.

3. $\exists P \in M : \exists t : P = (t, -2t, t)$.
Sant. Vi hävdar här att det finns en punkt i planet som också ligger på linjen, det vill säga har framställningen $(t, -2t, t)$. Detta är alltså sant även om inte alla punkter i planet ligger på linjen.

4. $\exists P \in R^3 : \exists t : P = (t, -2t, t)$ och $\exists P \in R^3 : \exists s \exists t : P = (-s - t, s, t) \cdot$
Båda sanna. I första utsagan hävdar vi att det finns en punkt i rummet som ligger på linjen. Det gör det. Välj vilken som helst! Andra utsagan berör planet och säger att det finns en punkt i planet som ligger i rummet. Det gör det. Välj vilken som helst!

5. $\exists P \in M : \forall t : P = (t, -2t, t)$.
Falskt. Här hävdar vi att det finns en punkt *P* i planet sådan att alla punkter på linjen sammanfaller med denna. Det finns oändligt många punkter på linjen och de kan alltså inte sammanfalla till en enda punkt.

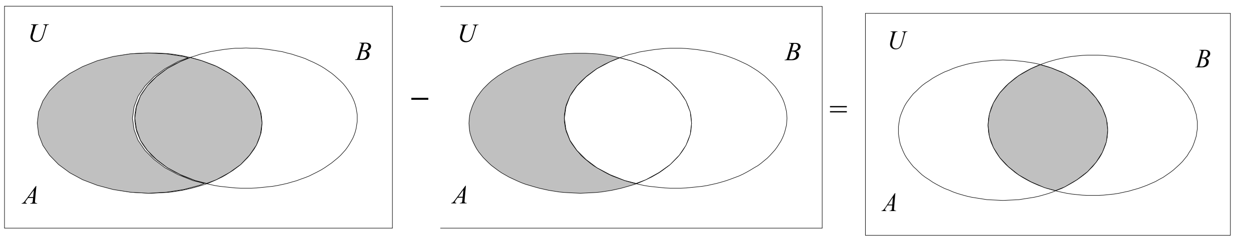
6. $\exists P \in M :\sim (\forall t : P = (t, -2t, t))$ och $\exists P \in M :\sim (\exists t : P = (t, -2t, t))$.
Vi skriver om utsagorna lite innan vi tolkar dem:
$\exists P \in M : \exists t : P \neq (t, -2t, t)$ och $\exists P \in M : \forall t : P \neq (t, -2t, t)$.

De är båda sanna. Den första utsagan säger att det finns en punkt i planet och en punkt på linjen som är skilda åt. Den andra utsagan säger att det finns en punkt i planet som har egenskapen att den inte sammanfaller med någon enda punkt på linjen. Det är sant eftersom planet innehåller flera punkter som inte ligger på linjen.

2.1.

Diagram 1 $(A-(B\cup C))\cup(A\cap B\cap C)$
Diagram 2 $(A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C))\cup(C-(A\cup B))\cup(A\cap B\cap C)$
Diagram 3 $((B\cap C)\cup(A\cap C)\cup(A\cap B))-(A\cap B\cap C)$
Diagram 4 $(B-(A\cup C))\cup((A\cap C)-B)$

2.2.

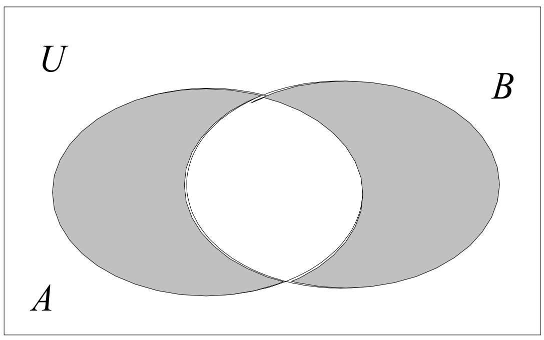


A $\quad$ $A-B$ $\quad$ $A-(A-B)$

Av Venndiagrammmet ser man att $A-(A-B)=A\cap B$. Vi kan låta mängderna A och B byta roller och då ser vi att även $B-(B-A)=A\cap B$. Således har vi $A-(A-B)=B-(B-A)=A\cap B$.

2.3.

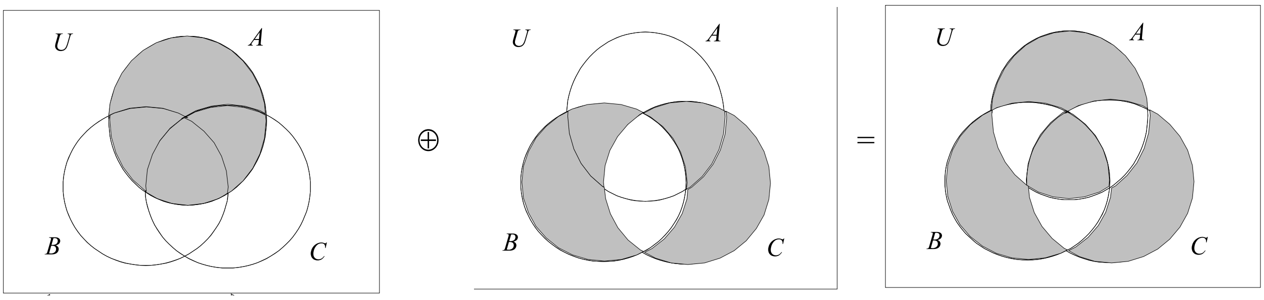
a)



$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

b)
$A\oplus\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$,
$A\oplus A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$,
$A\oplus U=(A-U)\cup(U-A)=\varnothing\cup A^c=A^c$,
$A\oplus A^c=(A-A^c)\cup(A^c-A)=A\cup A^c=U$.

c)



A $(B \oplus C)$ $A \oplus (B \oplus C)$

Om vi betraktar det sista Venndiagrammet som vi är bildat för $A \oplus (B \oplus C)$ ser vi att det är helt symmetriskt i *A*, *B* och *C*. Vi skulle lika gärna kunna låta *A*, *B* och *C* byta roller och vi skulle landa i samma Venndiagram. Om vi således hade bildat $(A \oplus B) \oplus C$ hade vi nått samma diagram. Detta innebär att $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ och alltså är $\oplus$ associativ, vilket skulle visas.

2.4.

Bevis av $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$:

Vi ska visa att $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$ för alla *x*. Låt därför *x* vara ett godtyckligt element. Då har vi $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \sim (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow \sim (x \in A) \vee \sim (x \in B)$. Här har vi använt DeMorgans lag från satslogiken och vi ser således hur DeMorgans lag från satslogiken också ger oss DeMorgans lag för mängdläran. Vi arbetar vidare: $\sim (x \in A) \vee \sim (x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$. Sammantaget har vi alltså visat att $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$ vilket innebär att mängderna $(A \cap B)^c$ och $A^c \cup B^c$ måste vara lika vilket skulle bevisas.

Bevis av $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: Vi ska visa att $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$. Låt därför *x* vara ett godtyckligt element. Vi har nu $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$. Här har vi i sista steget använt associativa lagarna från satslogiken och vi ser här hur associativa lagen från satslogiken ger oss associativa lagen i mängdläran. Vi arbetar vidare: $x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$. Vi har sammantaget visat att $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ vilket innebär att mängderna $(A \cup B) \cup C$ och $A \cup (B \cup C)$ måste vara lika vilket skulle bevisas.

Bevis för distributiva lagarna, absorptionslagarna och idempotens följer ovanstående mönster i detalj.

2.5. Bevis av $(A \cap B) - (C \cup D) = (A - C) \cap (B - D) = (A - D) \cap (B - C)$:

$(A \cap B) - (C \cup D) = (A \cap B) \cap (C \cup D)^c = A \cap B \cap C^c \cap D^c = A \cap D^c \cap B \cap C^c = (A - D) \cap (B - C)$.

I beviset kan vi låta *C* och *D* byta platser så att vi även får $(A \cap B) - (C \cup D) = (A - D) \cap (B - C)$. Beviset är klart.

2.6. Bevis av $(A \cup B) - (C \cup D) \subset (A - C) \cup (B - D)$:

$(A \cup B) - (C \cup D) = (A \cup B) \cap (C \cup D)^c = (A \cup B) \cap (C^c \cap D^c) = (A \cap (C^c \cap D^c) \cup B \cap (C^c \cap D^c))$. I sista ledet har vi använt distributiva lagen för mängder. Betrakta nu mängderna $A \cap (C^c \cap D^c)$ och $B \cap (C^c \cap D^c)$. Den mängd som vi kommit fram till är unionen av dessa två mängder. Om vi tar bort ett snitt från $A \cap (C^c \cap D^c)$ så får vi en större mängd. Vi har alltså att $A \cap (C^c \cap D^c) \subset A \cap (C^c)$. Aha!

Detta är ju $A-C$! Således har vi $A\cap(C^c\cap D^c)\subset A-C$. I analogi med detta har vi även $B\cap(C^c\cap D^c)\subset B-D$. Således gäller $(A\cap(C^c\cap D^c)\cup B\cap(C^c\cap D^c))\subset(A-C)\cup(B-D)$ och vi har alltså visat $(A\cup B)-(C\cup D)\subset(A-C)\cup(B-D)$ vilket skulle bevisas.

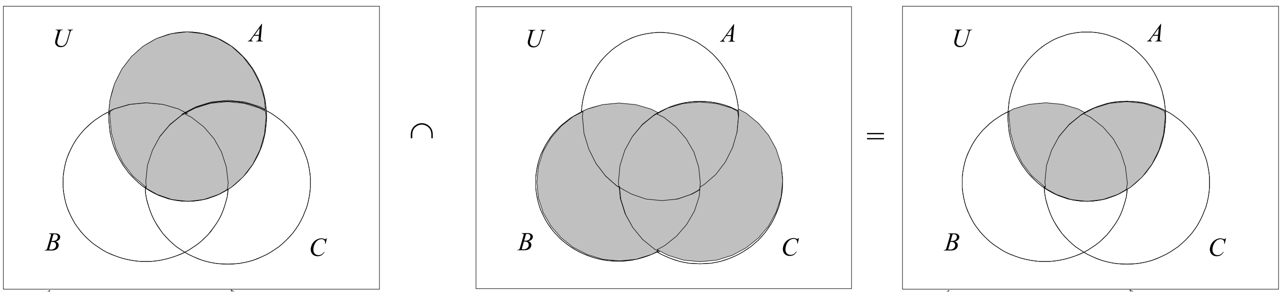
2.7.

1. Alla frågor är intressanta: $\forall x\in D: i(x)$.
(Ekvivalent med 7 enligt $\forall x\in D: i(x)\Leftrightarrow\sim(\sim\forall x\in D: i(x))\Leftrightarrow\sim\exists x\in D:\sim i(x)$)
2. För alla frågor gäller att de inte är intressanta; $\forall x\in D:\sim i(x)$.
(Ekvivalent med 4 enligt $\sim\exists x\in D: i(x)\Leftrightarrow\forall x\in D:\sim i(x)$)
3. Det finns en fråga som är intressant: $\exists x\in D: i(x)$.
(Ekvivalent med 8 enligt $\sim\forall x\in D:\sim i(x)\Leftrightarrow\exists x\in D:\sim(\sim i(x))\Leftrightarrow\exists x\in D: i(x)$.)
4. Det finns ingen fråga som är intressant: $\sim\exists x\in D: i(x)$. (Ekvivalent med 2.)
5. Det är inte alla frågor som är intressanta: $\sim\forall x\in D: i(x)$. (Ekvivalent med 6.)
6. Det finns en fråga som inte är intressant: $\exists x\in D:\sim i(x)$. (Ekvivalent med 5.)
7. Det finns inte en enda fråga som inte är intressant: $\sim\exists x\in D:\sim i(x)$. (Ekvivalent med 1.)
8. Det är inte alla frågor som inte är intressanta: $\sim\forall x\in D:\sim i(x)$. (Ekvivalent med 3.)

2.8. Det är en komplimang, *A* säger att *B* har goda kunskaper om något, fast något inlindat, med 4 negationer! (Som alla tar ut varandra.)

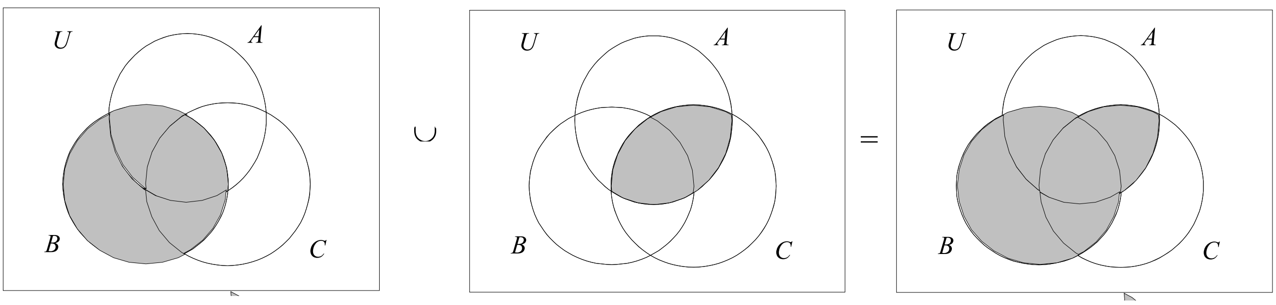
2.9.

Venndiagram för $A\cap(B\cup C)$:



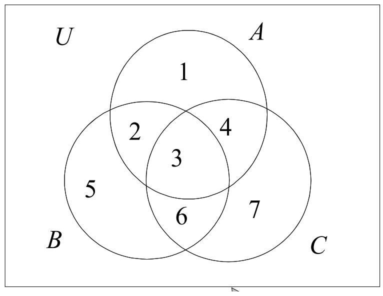
A $(B\cup C)$

Venndiagram för $B\cup(A\cap C)$:



B $(A\cap C)$

Mängderna är helt klart olika och vi kan bilda mängder *A*, *B* och *C* som inte uppfyller regeln genom att placera in siffror i varje fält i Venndiagrammet på följande sätt:



Vi har här A = { 1, 2, 3, 4 }, B = {2, 3, 5, 6} och C = { 3, 4, 6, 7 }. Vi har också $A \cap (B \cup C)$ = { 1, 2, 3, 4 } $\cap$ { 2, 3, 4, 5, 6, 7 } = <u>{2, 3, 4}</u>. Men $B \cup (A \cap C)$ = {2, 3, 5, 6} $\cup$ {3, 4 } = <u>{2, 3, 4, 5, 6}</u>. Dessa mänger är olika varför regeln $A \cap (B \cup C)$ = $B \cup (A \cap C)$ som sagt inte gäller.