Föreläsning 15, del c

Ex] Lös diffekvationen $xy' = e^{x^2} + 2x^2y$ med begynnelsevillkoret $y(1) = 1$.

Både y och y' förekommer direkt som faktorer i produkter med funktioner av x i var sin term (inga mer komplicerade uttryck, som till exempel y^2, $\sqrt{y'}$, yy', ...) - alltså är diffekvationen linjär!

Det finns en term som varken innehåller y eller y' - alltså är den inhomogen (och därmed inte separabel).

- Vi börjar med att få y' fritt:

$$xy' = e^{x^2} + 2x^2y \Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{e^{x^2}}{x} + 2xy \qquad (\text{Vi antar } x > 0)$$

- Sedan flyttar vi över y-termen så att vi har termen utan vare sig y eller y' ensam i högerledet.

$$y' = \frac{e^{x^2}}{x} + 2xy \Leftrightarrow y' - 2xy = \frac{e^{x^2}}{x}$$

- Nu ska vi hitta en primitiv funktion till funktionen av x som multiplicerar y och exponentiera den. Resultat: den integrerande faktorn!

$$\int (-2x)\,dx = -x^2 + C$$

Integrerande faktor: e^{-x^2}

- Multiplicera med den integrerande faktorn:

$$y' - 2xy = \frac{e^{x^2}}{x} \Leftrightarrow e^{-x^2}(y' - 2xy) = e^{-x^2}\frac{e^{x^2}}{x} \Leftrightarrow$$

$$(-2xe^{-x^2})y + e^{-x^2}y' = \frac{1}{x}e^{x^2-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right)y + e^{-x^2}\left(\frac{d}{dx}y\right) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x^2}y) = \frac{1}{x}$$

- Integrera!

$$e^{-x^2}y = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

- Dividera med den integrerande faktorn för att lösa ut y:

$$y = e^{x^2}\ln x + Ce^{x^2}$$

- Begynnelsevillkoret ger

$$1 = e\ln 1 + Ce \Leftrightarrow C = e^{-1} \text{ och}$$

$$\underline{y = e^{x^2}\ln x + e^{x^2-1}}$$