Föreläsning 1, del e (demonstration testuppgifter)

1.6 Vilket i ordningen är talet 486 i den geometriska talföljden 2, 6, 18, ... ?

Lösning: Talföljden kan skrivas $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ där $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 18$, ...

Eftersom den är geometrisk finns det en konstant kvot

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \dots = 3$$

vilket ger $a_k = a_1 \cdot q^{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 3^k =$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3^k \text{ för alla } k \in \mathbb{Z}_+$$

$$a_k = 486 \iff \frac{2}{3} \cdot 3^k = 486$$

$$\iff 3^k = \frac{3}{2} \cdot 486 = 3 \cdot 243 =$$

$$= 3 \cdot (3 \cdot 81) = 3 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3)$$

$$\iff k = 6$$

Svar: Det sjätte!

1.9 Talföljden 1, 4, 7, ... är aritmetisk. Beräkna summan av

a) de tio första termerna

b) de n första termerna

Lösning: Talföljden kan skrivas $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ där $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, ...

Eftersom den är aritmetisk finns det en konstant differens

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = 4 - 1 = 7 - 4 = \dots = 3$$

vilket ger $a_k = a_1 + (k-1)d = 1 + 3(k-1) =$

$$= 1 + 3k - 3 = 3k - 2$$

a) $$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \, \frac{a_1 + a_{10}}{2} = 5\left(1 + (3 \cdot 10 - 2)\right) =$$

$$= 5(1 + 30 - 2) = 5 \cdot 29 = 145$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\left(a_1 + d\,\frac{n-1}{2}\right) = n\left(1 + 3\,\frac{n-1}{2}\right) =$$

$$= n\left(1 + \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}\right) = n\left(\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\right) = n\,\frac{3n-1}{2}$$

Svar: a) 145 b) $n\,\dfrac{3n-1}{2}$