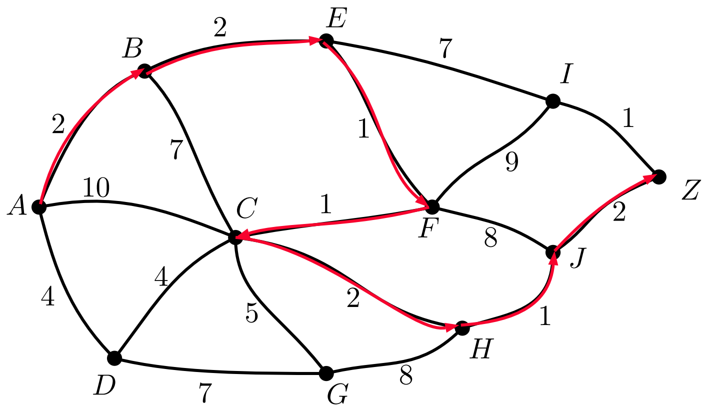
Lösningar

7. *Grafteori.* Betrakta nedanstående graf. Finn en minimal väg från A till Z med hjälp av Dijkstras algoritm och redovisa alla steg i algoritmen inklusive alla kandidatetiketter. Alla hörn ska ha etiketter på sig och du ska ange den resulterande minimala vägen och dess kostnad.

Lösning: Ni behöver inte rita ut den minimala vägen, men i följande lösning är detta änddå gjort.



Etiketter i de olika stegen i Dijkstras algoritm redovisas nedan. De som är i fetstil är de etiketter som valts för varje hörn. De som inte är i fetstil är de kandidater som inte valts (i just det delsteget).

Steg 1. ***B(A,2)***, *D(A,4), C(A,10)*
Steg 2. ***E(B,4)***, *C(B,9),* ***D(A,4)***
Steg 3. *I(E,11),* ***F(E,5)***, *C(D,8), G(D,11)*
Steg 4. ***C(F,6)***, *G(D,11), I(E,11), J(F,13)*
Steg 5. *G(C,11),* ***H(C,8)***, *I(E,11), J(F,13)*
Steg 6. *G(C,11), I(E,11),* ***J(H,9)***
Steg 7. ***G(C,11)***, ***I(E,11)***, ***Z(J,11)***

Från etikettmängden läser vi av en minimal väg som blir

$$A \to B \to E \to F \to C \to H \to J \to Z$$

och den har kostnaden 11 (som anges i Z:s etikett).

8. *Kombinatorik.* Betrakta ordet STÅNGISEN. Hur många sinsemellan olika bokstavsföljder kan bildas med bokstäverna i det ordet?

Lösning: Bokstäverna i ordet kan grupperas så här:

$$SS \quad NN \quad TÅGIE$$

det är alltså nio bokstäver där några bokstäver upprepas (S och N). Om dessa nio bokstäver placeras i en följd så kan vi se utplacerandet av dem som en process i 7 steg:

Steg 1: Placera ut de 2 S:n, det kan ske på $\binom{9}{2}$ sätt,
Steg 2: placera därefter ut de 2 N:n, det kan ske på $\binom{7}{2}$ sätt,
Steg 3: placera därefter ut T:et, det kan ske på 5 sätt,
Steg 4: placera därefter ut $Å$:et, det kan ske på 4 sätt,
Steg 5: placera därefter ut G:et, det kan ske på 3 sätt,
Steg 6: placera därefter ut I:et, det kan ske på 2 sätt,
Steg 7: placera därefter ut E:et, det kan ske på 1 sätt.

Enligt multiplikationsprincipen blir totala antalet sätt att placera ut bokstäverna (som också blir antalet ordningsföljder av bokstäverna i ordet) lika med

$$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

9. *Sannolikhetslära.* Låt S vara ett utfallsrum med händelserna A och B. Antag vidare att $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ och att $P(A \cup B) = 0.9$.

a) är händelserna A och B oberoende? Motivera.

b) är händelserna A och B disjunkta? Motivera. *(disjunkta=oförenliga)*

Lösning: Vi har alltid formeln $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ och om vi sätter in värdena för $P(A)$, $P(B)$ och $P(A \cup B)$ får vi

$$0.9 = 0.4 + 0.6 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.1.$$

vilket betyder att $A \cap B \neq \emptyset$ eftersom $P(A \cap B) = 0.1 > 0$, det vill säga händelserna A och B kan *inte* vara disjunkta (detta är alltså svaret på *(b)*). Vidare gäller

$$P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24 \neq 0.1 = P(A \cap B)$$

det vill säga vi har

$$P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$$

och A och B är därför *inte* heller oberoende (som alltså är svaret på *(a)*). (**Likhet** hade krävts för oberoende.)