Föreläsning 13, del c

Regeln för arean "över eller under en graf" kan generaliseras till en regel för "arean mellan två grafer":

Låt f och g vara kontinuerliga funktioner på $[a, b]$ sådana att $f(x) \geq g(x)$ för alla $x \in [a, b]$.

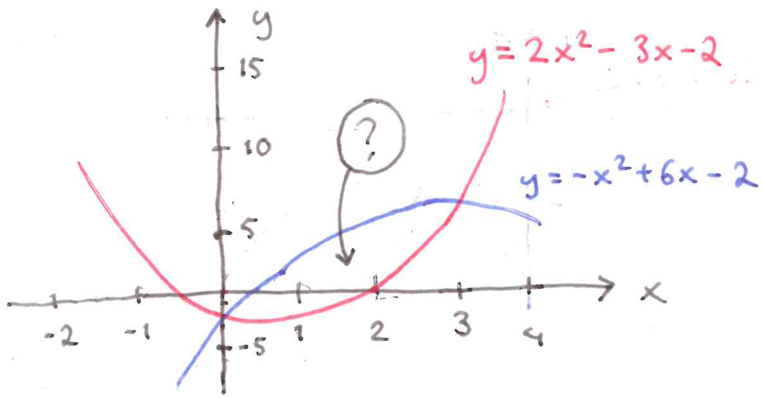
Låt D vara området som begränsas av graferna till f och g samt de vertikala linjerna $x = a$ och $x = b$, med area $m(D)$:

Då gäller: $m(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx =$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Ex) Beräkna arean av området som begränsas av kurvorna $y = 2x^2 - 3x - 2$ och $y = -x^2 + 6x - 2$:

(Jfr Ex. 4.1 i boken)



Här har vi inga vertikala linjer, vilket betyder att vi ska integrera mellan x-värdena för skärningspunkterna.

$2x^2 - 3x - 2 = -x^2 + 6x - 2 \iff$

$3x^2 - 9x = 0 \iff 3x(x-3) = 0 \iff$

$x = 0$ eller $x = 3$

Vi ska alltså integrera över intervallet $0 \leq x \leq 3$. Eftersom det inte finns fler skärningspunkter måste en av funktionerna vara större än den andra överallt där.

Vi testar att integrera

$$\int_0^3 \left((2x^2 - 3x - 2) - (-x^2 + 6x - 2)\right) dx =$$

$$= \int_0^3 (3x^2 - 9x)\,dx = 3\int_0^3 x^2\,dx - 9\int_0^3 x\,dx =$$

$$= [x^3]_0^3 - \frac{9}{2}[x^2]_0^3 = 3^3 - \frac{9}{2}3^2 = 3^3\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{2}$$

Vi fick ett negativt tal, men <u>en area är alltid positiv</u>! Alltså måste vi ha $2x^2 - 3x - 2 \leq -x^2 + 6x - 2$ för alla $x \in [0, 3]$, vilket stämmer med figuren, och <u>arean blir $\frac{27}{2}$</u>

<u>Tips!</u> Rita figur, kolla tecken!