Föreläsning 15, del d

Vad innebär det att en diffekvation är linjär?

En linjär diffekvation av första ordningen kan skrivas $y'(x) - f(x)y(x) = g(x)$, eller

$$\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y(x) = g(x)$$

Operatorn $\frac{d}{dx} - f(x)$ är linjär, det vill säga uppfyller räknereglerna

$$\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right)(y_1(x) + y_2(x)) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y_1(x) + \left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y_2(x)$$

och $\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) k y(x) = k\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y(x)$

där k är en konstant.

Anta nu att $y(x) = y_1(x)$ är en lösning till
$y'(x) - f(x)y(x) = g_1(x)$

och att $y(x) = y_2(x)$ är en lösning till
$y'(x) - f(x)y(x) = g_2(x)$ $\longrightarrow$

Det följer då av. lineariteten att

$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ är en lösning till

$y'(x) - f(x)y(x) = g_1(x) + g_2(x)$.

Speciellt innebär detta att om vi har hittat <u>en</u> lösning $y_p(x)$ till (den inhomogena) linjära diffekvationen $y'(x) - f(x)y(x) = g(x)$ så kan vi alltid addera en lösning $y_h(x)$ till motsvarande <u>homogena</u> diffekvation $y'(x) - f(x)y(x) = 0$ och få en ny lösning.

Och vi kan få <u>alla</u> lösningar till $y'(x) - f(x)y(x) = g(x)$ genom att addera alla lösningar till $y'(x) - f(x)y(x) = 0$ för om vi låter $y(x)$ vara en godtycklig lösning så får vi:

$$\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right)(y(x) - y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0$$

Alltså är $y(x) - y_p(x)$ en lösning $y_h(x)$ till $\left(\frac{d}{dx} - f(x)\right) y(x) = 0$ och därmed

$$\underline{y(x) - y_p(x) = y_h(x) \Leftrightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$