Föreläsning 16, del c

Ex) Lös diffekvationen $2y'' - 4y' - 6y = 0$!

Karakteristiskt polynom:

konjugat-regeln

$$2r^2 - 4r - 6 = 2(r^2 - 2r - 3) =$$

$$= 2((r^2 - 2r + 1) - 4) = 2((r-1)^2 - 4) =$$

$$= 2((r-1)+2)((r-1)-2) = 2(r+1)(r-3)$$

Nollställen: $r_1 = -1$ och $r_2 = 3$

Allmän lösning till diffekvationen:

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{-x} + Be^{3x}$$

Vad händer om det karakteristiska polynomet har ett dubbelt nollställe ($r_1 = r_2$)? (Jfr del b)

$$D(e^{-r_2 x} y(x)) = Ce^{(r_1 - r_2)x} \Leftrightarrow$$

$$D(e^{-r_2 x} y(x)) = C \Leftrightarrow$$

ny konstant

$$e^{-r_2 x} y(x) = Cx + B \Leftrightarrow$$

$$y(x) = (Cx + B)e^{r_2 x} = (Cx + B)e^{r_1 x}$$

Vi får alltså den allmänna lösningen $y(x) = (Cx + B)e^{r_1 x}$ där C och B är godtyckliga konstanter.

Vad händer om det karakteristiska polynomet saknar reella nollställen? I så fall har det två komplexa nollställen $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$ där a och b är reella tal.

Allmän lösning:

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

$$= Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} =$$

$$= Ae^{ax}e^{ibx} + Be^{a}e^{-ibx} = \text{(Eulers formler)}$$

$$= Ae^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$+ Be^{ax}(\cos bx - i \sin bx) =$$

$$= e^{ax}(A + B)\cos bx + e^{a}(iA - iB)\sin bx =$$

$$= e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

där $C_1 = A + B$ och $C_2 = i(A - B)$ är godtyckliga (reella) konstanter.

Ex) När en fjäder sträcks ut är kraften (och därmed accelerationen y'') omvänt proportionell mot förflyttningen y från jämviktsläget:

$$y'' = -\omega^2 y \Leftrightarrow y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{(se Ex 5.20!)}$$