Föreläsning 2, del a

Induktion (1.5)

- induktionsprincipen

Ex Finns det någon formel för summan $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ som gäller för alla $n \in \mathbb{Z}_+$?

Vi beräknar först summan för $n = 1, 2, 3$:

$$n=1: \quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$n=2: \quad \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$n=3: \quad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Förmodan:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{för alla } n \in \mathbb{Z}_+$$

Hur visar vi detta?

Problem: de positiva heltalen är oändligt många, det skulle ta oändligt lång tid att kolla varje n för sig!

Lösning: induktion!

Betrakta utsagan (påståendet)

$$U(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}_+$$

För varje positivt heltalsvärde på n finns det ett sanningsvärde (sant / falskt) på $U(n)$.

Vi har visat att $U(1)$, $U(2)$, $U(3)$ alla är sanna. Vi vill visa att utsagan $U(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.