Föreläsning 12, del c

Sats Analysens huvudsats:

Anta att f är kontinuerlig på $[a,b]$.

Då är funktionen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

en deriverbar funktion på $[a,b]$, och

$F'(x) = f(x)$. (Alltså är F en primitiv funktion till f!) Med andra ord:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Bevis ③

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \text{(medelvärdessatsen)}$$

$$= f(\xi)((x+h)-x) = h f(\xi)$$

för något $\xi \in [x, x+h]$ med gränsvärdet $\xi \to x$ då $h \to 0$.

Nu får vi

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h f(\xi)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x). \qquad \square$$

Sats Insättningsformeln:

Anta att f är kontinuerlig på $[a,b]$ och att F är en primitiv funktion till f.

Då gäller $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Bevis Två primitiva funktioner kan bara skilja sig åt på en konstant C. Det finns alltså en konstant C så att

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$. Sätt in $x=b$ och $x=a$!

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)\,dt + C\right) - \left(\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C\right) =$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt + C - C$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \square$$