KAPITEL 9 - GRUNDLÄGGANDE DISKRET SANNOLIKHETSLÄRA

1. Introduktion

Sannolikhetslära och statistik är viktiga matematiska instrument för att fatta verklighetsförankrade beslut. Det är svårt att överskatta betydelsen det har för vårt samhälle. Besluten som fattas med hjälp av sannolikhetsteoretiska tillämpningar (om vi också hit räknar matematisk statistik) har avgörande betydelse för bland annat

(1) ekonomisk planering i såväl näringsliv som offentlig sektor,
(2) politiska beslut och opinionsmätningar,
(3) den vetenskapliga metoden då data och/eller mätvärden behöver analyseras på ett korrekt sätt.

Eftersom sannolikhetslära och statistik är så kraftfulla verktyg har missbruk förekommit, medvetet eller omedvetet. Det finns ett talesätt att vi kan skilja på olika sorters lögner, genom att säga att det finns ”lögner”, sedan finns det något som är värre som kallas ”förbannade lögner” och till sist finns det värsta som är ”statistik”. Läkemedelsföretag som vill sälja sina läkemedel måste noggrannt testa sina produkter innan de får förskrivas av läkare, men trots dessa försiktighetsåtgärder har skandaler förekommit, till exempel den så kallade Neurosedynkatastrofen som på 60-talet ledde till att människor föddes utan armar och ben och detta kunde klart konstateras som en biverkan till läkemedlet Neurosedyn som sades kunde hjälpa kvinnor som blev illamående på morgnarna under graviditet.

Förutom att statistik kan användas för bedrägerier så finns också svårigheten att många människor har missuppfattningar om hur sannolikheter egentligen fungerar. Om ett flygplan störtar nära ett bostadsområde är det meningslöst att lugna invånarna med att ”rent statistiskt sett” är det tryggare att bo där nu eftersom det är mycket osannolikt att två flygplan skulle störta på samma ställe. Affärer som sålt vinstlotter annonserar ofta om det: ”Här såldes hundratusenkronorsvinsten!” som om det vore rätt att tänka sig att det kanske är gynnsamt att köpa lotter där nu eftersom det rent statistiskt verkar som att vinstlotter dyker upp där. De båda resonemangen med flygkrascher och vinstlotter är liknande resonemang men drar motsatta slutsatser. Inget av resonemangen är korrekta ur en rent statistisk eller sannolikhetsteoretisk synpunkt.

Ett av målen med det här kapitlet är att skapa mer klarhet kring frågeställningar som involverar sannolikhet. Men för att kunna göra det behöver vi först skapa en ordentlig matematisk definition av sannolikhet.

2. Händelser och utfallsrum

När vi inför sannolikhet ska vi utgå från vår grundläggande känsla för vad sannolikhet är och uppgradera de definitioner vi gör till det fullfjädrade sannolikhetsteoretiska teoribygget. En sådan grundläggande känsla säger oss att

det är ungefär 17% chans att få en etta då vi kastar en tärning.

Tärningen antas ha sex sidor och vara välgjord, det vill säga det är lika stor chans att olika sidor kommer upp och i den kommande framställningen kommer alla tärningar antas vara av det slaget om ingenting annat nämns. Talet 17% är en uppskattning av $1/6$ (som är exakt $0.16666\ldots$) och om vi kastar en sexsidig välgjord tärning ett stort antal gånger (till exempel 100000 gånger) får vi resultatet ”ett” runt cirka 16667 gånger som är cirka $1/6$ av det totala antalet kast. Vi säger då att

det är 17% *sannolikhet* att få en etta då vi kastar en tärning.

Själva ordet ”sannolikhet” är ett neutralt uttryck för ”chans” eller ”risk”. När vi vill göra statistiska undersökningar vill vi gärna att de ska vara sakliga och fokuserade och då är det bra att använda så neutrala uttryck som möjligt. Orden ”chans” och ”risk” kan ofta aktivera våra önsketankar och när vi till exempel bedriver vetenskap vill vi att vårt arbete ska vara fritt från önsketankar.

Det är ofta stödjande för förståelsen av sannolikhetsteoretiska resonemang att tänka sig att det finns en process eller ett experiment som upprepas många gånger och att anse att sannolikheter är mätvärden på hur stora andelar som experimentet ger ett visst resultat. Ovan beskrevs experimentet att kasta en tärning och vi studerade i hur stor andel av ett stort antal experimentomgångar (tärningskast) vi fick just resultatet etta. Den andelen var 17% och därför sade vi att sannolikheten var 17%. (Egentligen exakt $1/6$.)

Vi använder detta sätt att resonera på om ett annat slumpmässigt experiment: att singla mynt.

Exempel: Två välgjorda mynt singlas, ange följande sannolikheter

(a) Båda mynten ger utfallet *Krona*
(b) Mynten ger samma utfall alltså *Krona-Krona* eller *Klave-Klave.*
(c) Mynten ger olika utfall alltså *Krona-Klave* eller *Klave-Krona.*

Lösning: Vi för våra resonemang med utgångspunkt från att experimentet att singla två mynt utförs ett stort antal gånger och vi vill beräkna hur ofta de olika händelserna inträffar som är beskrivna under de olika fallen (a)-(c) ovan. Om vi till exempel singlar två mynt 100000 gånger anser vi att sannolikheten för att första händelsen (den i (a)) inträffar är andelen gånger som vi får *Krona* på båda mynten. Vi ska ange denna andel i procent.

För att hitta den första sannolikheten (i (a)) kan vi resonera på följande sätt: vi singlar först ett mynt. I 50% av fallen kommer *Krona* upp (alltså cirka 50000 fall om vi hade 100000 singlingar med mynten). När nu andra mynten singlas kommer det att bli *Krona* återigen i 50% av fallen, så totala antalet fall där vi har *Krona* i båda singlingarna blir hälften av hälften, det vill säga 50% *av* 50%, så sannolikheten för *Krona* i båda singlingarna blir

$$50\% \cdot 50\% = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 = 25\%.$$

Och det skulle svarat mot 25000 fall om vi hade haft 100000 singlingar med mynten.

För att finna den andra sannolikheten (i (b)) där vi söker sannolikheten att mynten ger olika utfall observerar vi att *oberoende* av vilket resultat det första myntet ger (*Krona* eller *Klave*) är det 50% chans att det andra myntet ger samma resultat, så sannolikheten blir helt enkelt 50%.

Men ett annat sätt att resonera kan vara att vi observerar att vi kan få samma resultat i båda singlingarna på två sätt: antingen är det *Krona-Krona*, eller så är det *Klave-Klave.* Sannolikheten för att det blir *Krona-Krona* har vi redan räknat ut till 25% och det svarar alltså mot 25% av slutresultaten (exempelvis 25000 av de 100000 singlingarna). Vid närmare eftertanke måste sannolikheten för att det blir *Klave-Klave* vara exakt lika den för *Krona-Krona*, det vill säga 25%, men dessa fall, eller utfall som de också kallas, måste ju vara en helt åtskild mängd av utfall jämfört med de utfall som utgörs av att vi får *Krona-Krona*: vi kan ju inte både ha *Krona-Krona* och *Klave-Klave.* Alltså svarar de båda delfallen mot två disjunkta mängder av utfall och för att få andelen av totala antalet utfall kan vi helt enkelt bara addera andelarna för de båda fallen och vi får då sannolikheten som vi söker som

$$25\% + 25\% = 0.25 + 0.25 = 0.50 = 50\%$$

vilket förstås överenstämmer med det resultat vi fick av det tidigare sättet att resonera.

Lägg märke till hur multiplikations- och additionsprinciperna från kombinatoriken också förekommer här: i (a) multiplicerar vi sannolikheter med varandra som svarar mot att vi beräknar sannolikheten för att ett utfall ska uppkomma som baseras på en process i flera delsteg. Här finns det två delsteg: 1. singla mynt 1 och få *Krona* – 50%. 2. singla andra myntet och få *Krona* – 50%. Sannolikheten för att båda ska inträffa: $0.5 \cdot 0.5 = 0.25 = 25\%$. I (b) adderar vi de olika fallen (som svarar mot disjunkta mängder i additionsprincipen) som har sannolikheter 25% och 25%. Summan blir 50%. Vi lämnar till läsaren att övertyga sig om att sannolikheten i (c) kan räknas ut nästan på samma sätt som den i (b).

Vi ska nu införa en del terminologi för att precisera vad vi menar med sannolikhet och relaterade begrepp. Vi har i exemplen redan föregripit detta något genom att använda termerna ”utfall” och ”händelse”. Vi ska nu ge dessa ord en mer precis innebörd.

Definition: Ordet *experiment* eller *försök* används för en process eller procedur som har en möjlig mängd slumpmässiga *utfall.* Med *utfall* menas då ett enskilt resultat av experimentet. (Vi har sett tärningskast och slantsingling som exempel på experiment.) Om ett visst utfall uppkommer som resultat av experimentet så säger vi att det utfallet *inträffar.*

Mängden av möjliga utfall hörande till ett experiment kallas experimentets *utfallsrum.* Vi använder ofta bokstaven S för att beteckna ett utfallsrum från det engelska ordet för utfallsrum som är *Sample Space.* Ordet *händelse* används för att beteckna en delmängd av utfallsrummet. (Ett exempel på en händelse var att få samma resultat vid singlingar av de två mynten: ett utfall/resultat var *Krona-Krona* respektive *Klave-Klave* och händelsen ”olika resultat” blir då mängden $\{Krona\text{-}Krona, Klave\text{-}Klave\}$.) Vi säger att en händelse A

inträffar om resultatet av experimentet är ett utfall som inträffar och det utfallet ingår som element i A.

Vi ska nu bygga upp sannolikhetsteorin med målet att tilldela händelser, alltså mängder av utfall, sannolikheter. Sannolikheterna är tal mellan 0 och 1 och ska ange chansen att en viss händelse inträffar. Så en sannolikhetstilldelning för ett utfallsrum S kommer först och främst kunna uppfattas som en reellvärd funktion

$$P : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$$

där $\mathcal{P}(S)$ som förut betecknar potensmängden till S, alltså mängden av alla delmängder (alltså händelser) till S. Vi kommer bara att studera de fall där vi kan definiera en sådan funktion. Det finns dock situationer där en sådan sannolikhetsfunktion inte kan defineras matematiskt på ett sätt som låter oss göra beräkningar på ett bra sätt, men de situationerna bryr vi oss inte om. I korthet kan sägas att då utfallsrummet S är en ändlig mängd, eller en mängd vars element (alltså utfall) kan räknas upp i en komplett lista, inte skapar problem. (Det går alltså att definiera sannolikhetsfunktionen utan svårigheter.)

Vi kallar en funktion som införts på ovanstående sätt för en *sannolikhetsfunktion* och vi observerar att det alltså är en funktion som går från en mängd av mängder som vi råkar kalla *händelser*. En funktion av detta slag brukar ibland kallas en *mängdfunktion*. Sannolikhetsfunktionen P kommer att ha flera krav på sig som vi snart inför men innan vi gör det ska vi formulera om vårt exempel ovan med singling av de två myntens med de nya termerna.

Vi studerade utfallsrummet hörande till ett experiment som bestod i att singla två mynt efter varandra. De olika enskilda utfallen var då till fyra till antalet och kunde benämnas

$$\textit{Krona-Krona}, \quad \textit{Krona-Klave}, \quad \textit{Klave-Krona}, \quad \textit{Klave-Klave}$$

och utfallsrummet består alltså av mängden av dessa fyra utfall. De händelser vi studerade var

(a) ”båda slantsinglingarna ger *Krona*”,
(b) ”slantsinglingarna ger samma resultat”, och
(c) ”slantsinglingarna ger olika resultat”

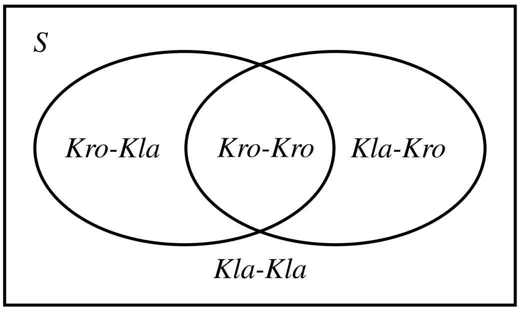
och dessa tre olika händelser, betraktade som delmängder av utfallsrummet kan anges som mängderna

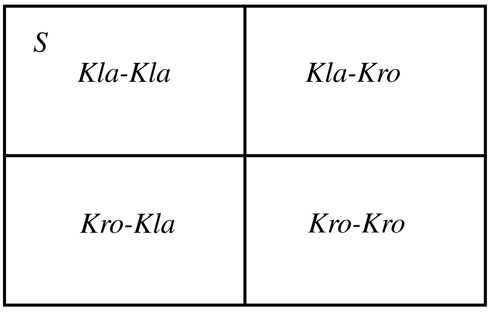
(a) $\{\textit{Krona-Krona}\}$
(b) $\{\textit{Krona-Krona}, \textit{Klave-Klave}\}$, respektive
(c) $\{\textit{Krona-Klave}, \textit{Klave-Krona}\}$

och slutligen konstaterar vi att de resonemang vi förde om sannolikheterna för de olika händelserna gav oss resultaten

(a) $P(\{\textit{Krona-Krona}\})$ = sannolikheten att händelsen $\{\textit{Krona-Krona}\}$ inträffar $= 0.25 = 25\%$,
(b) $P(\{\textit{Krona-Krona}, \textit{Klave-Klave}\})$ = sannolikheten att händelsen $\{\textit{Krona-Krona}, \textit{Klave-Klave}\}$ inträffar $= 0.5 = 50\%$, samt
(c) $P(\{\textit{Krona-Klave}, \textit{Klave-Krona}\})$ = sannolikheten att händelsen $\{\textit{Krona-Klave}, \textit{Klave-Krona}\}$ inträffar $= 0.5 = 50\%$.

Eftersom händelser definieras som delmängder av utfallsrummet kan vi uppfatta hela utfallsrummet som ett universum för alla händelser möjliga händelser i ett visst givet experiment. Eftersom händelser *är* mängder kan vi använda oss av alla resultat och metoder från mängdläran och däribland finns förstås verktyget Venndiagram. För experimentet med de två myntkasten kan vi rita två Venndiagram som inte liknar varandra vid första anblicken men som trots det ger oss två ekvivalenta representationer av experimentet och alla dess utfall. (Vi har av grafiska skäl förkortat namnen på de individuella utfallen till *Kro-Kro*, *Kro-Kla* och så vidare.)





Minns att utfallsrummet S bara består av fyra utfall (element), så att vi har

$$S = \{\textit{Kla-Kla}, \textit{Kro-Kla}, \textit{Kro-Kro}, \textit{Kla-Kro}\}.$$

Vi ska studera andra händelser än de vi studerat ovan och i diagrammet till vänster har vi, till vänster i diagrammet, ringat in händelsen (delmängden) som består av utfallen *Kro-Kla* och *Kro-Kro*. Denna händelse skulle kunna benämnas ”*första myntet ger Krona*”. Till höger om den här händelsen (fortfarande i diagrammet till vänster) har vi ringat in händelsen som består av utfallen *Kro-Kro* och *Kla-Kro* som på motsvarande sätt skulle kunna benämnas ”*andra myntet ger Krona*”. Vi kan förstås tala om snitthändelsen som då kan karakteriseras av beskrivningen ”*båda kasten ger Krona*” och denna händelse blir då delmängden $\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}$ (som vi sett förr) som är snittmängden av $\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kla}, \mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}$ och $\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kro}\}$.

I diagrammet till höger representeras utfallsrummet i rader och kolumner istället, men läsaren inser, efter en stunds betraktelse att diagrammen i själva verket representerar samma experiment. I diagrammet till höger har vi dock inte infört några händelser på samma sätt som i diagrammet till vänster.

Vi ska fortsätta att arbeta med exempel i det här utfallsrummet som hör till experimentet att singla två mynt efter varandra och nu ge exempel som gradvis illustrerar att det här egentligen enkelt uttryckt bara är mängdlära med något extra som kallas sannolikhet.

Vi inför därför två händelser som vi benämner A och B där

$A =$ ”*de båda myntens resultat är olika eller båda är Krona*”
$B =$ ”*de båda myntens resultat är samma eller båda är Krona*”

Händelser är mängder och i definitionen av händelserna används ordet *eller*. Det innebär (eftersom det är mängder) att vi kan uppfatta dessa händelser som unioner av enklare händelser och att vi alltså kan skriva

$$A = \{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kla}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kro}\} \cup \{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\} \text{ och } B = \{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\} \cup \{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}.$$

Våra första utredningar av sannolikhet har visat att

(a) $P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}) = 0.25$,
(b) $P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kla}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kro}\}) = 0.50$ och
(c) $P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\}) = 0.50$

och när vi nu vill tilldela händelserna A och B sannolikheter vill vi att det ska ske på ett sätt så att

$$P(A) = P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kla}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kro}\}) + P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}) = 0.50 + 0.25 = 0.75$$

vi vill alltså att om vi har en händelse som är unionen av två disjunkta händelser (inga gemensamma utfall) så ska sannolikheten för unionhändelsen kunna beräknas som summan av de båda sannolikheterna för de händelser som bildar unionen.
Det är alltså 75% chans att händelsen A inträffar och denna sannolikhet fås genom att addera sannolikheterna för de båda disjunkta händelser vars union bildar A.
Detta är också helt i analogi med att räkna antalet element i två disjunkta mängder som vi minns från avsnittet om antal element i en mängd från kapitlet om mängder.

Vi ser också att händelsen B kan skrivas om som $B = \{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\}$ eftersom B är union mellan två mängder där den ena mängder är delmängd av den ena. Då blir ju B bara den större mängden eftersom inget tillförs då vi tar den större mängden (händelsen $\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\}$) i union med mängden av den redan ingående händelsen ($\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}$). För sannolikhetsfunktionen betyder det här att vi vill att sannolikheten för händelsen B ska vara sannolikheten för händelsen $\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\}$ så att vi har formeln

$$P(B) = P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\} \cup \{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}) = P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\}) = 0.5$$

och alltså *inte* den felaktiga formeln

$$P(B) = P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\} \cup \{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}) = P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}, \mathit{Kla}\text{-}\mathit{Kla}\}) + P(\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}) = 0.75.$$

Det här återigen i analogi med att räkna element i mängder som är unioner som vi studerade noggrannt i avsnittet om principen om inklusion och exklusion: vi ska alltså inte räkna element i snittmängden (här $\{\mathit{Kro}\text{-}\mathit{Kro}\}$) två gånger.

Övningar

9.2.1 Singla ett mynt fem gånger. Fick du *Krona* åtminstone en gång? Singla ett mynt fem gånger till. Vad är sannolikheten att få *Krona* åtminstone en gång vid fem singlingar? Vad är sannolikheten att inte få några *Klave* alls?

9.2.2 Finn ett bra utfallsrum för att beskriva utfallen av kast med två vanliga sexsidiga tärningar. Vad blir sannolikheterna för de enskilda utfallen av ditt utfallsrum? Vad är sannolikheten för att få tärningssumman 6 eller 7? Antag att tärningarna har olika färger, röd och grön. Vad är sannolikheten att få mindre än 3 på den röda och mer än 3 på den gröna?

9.2.3 Ange ett lämpligt utfallsrum för experimentet där vi singlar tre mynt och studerar resultaten av alla tre mynt parallellt. (Om du vill kan du representera krona med en nolla och klave med en etta.)

9.2.4 Vad är sannolikheten att få ett udda antal *Krona* vid tre singlingar av ett mynt?

9.2.5 Använd mängden $\{0, 1, 2, 3\}$ som ett utfallsrum för experimentet där du singlar ett mynt tre gånger och räknar antalet gånge du får *Krona*. Beräkna de individuella sannolikheterna $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ och $p(3)$. (Hör troligen till nästa avsnitt.)

9.2.6 Vad är sannolikheten att få precis tre *Krona* då du singlar ett mynt fem gånger? Vad är sannolikheten att få *Krona* tre gånger *eller mer* då du singlar ett mynt fem gånger?

9.2.7 När vi kastar två vanliga sexsidiga tärningar, vad är sannolikheten att få tärningssumman 4 eller mindre?

9.2.8 Vad är sannolikheten att få en udda summa då vi kastar tre sexsidiga tärningar?

9.2.9 Låt U vara ett utfallsrum med de två händelserna A och B. Beskriv händelserna

$$a)\quad A \cup B, \qquad b)\quad A \cap B, \qquad c)\quad A - B, \qquad d)\quad A \cap B^c, \qquad e)\quad A^c \cap B^c$$

med vanliga ord. Till exempel betyder $A \cup B$ att "A eller B inträffar". (Så du behöver alltså inte lösa a)-uppgiften.) Illustrera händelserna i Venndiagram.

3. Grundläggande egenskaper hos händelser och utfallsrum

Vi är nu redo att ge formella definitioner av vad sannolikhet är och vi ger det genom att formulera två definitioner. Vår uppgift är sedan att visa att sannolikheten har alla de egenskaper som vi skisserat ovan.

Definition: En ändlig mängd $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, där $\{x_i\}_{i=1}^n$ är utfall i ett experiment, kallas ett *ändligt utfallsrum* om och endast om:

1. till varje utfall x_i finns ett associerat tal mellan 0 och 1 kallat den *individuella sannolikheten* för x_i som betecknas $p(x_i)$, och
2. summan av alla individuella sannolikheter för alla utfall är 1, det vill säga $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$.

Vi uppfattar här p som en funktion som vi benämner den *individuella sannolikhetsfunktionen* för S.

Den här definitionen inför alltså sannolikhet som någonting som tilldelas *enskilda utfall*, men vi vill införa sannolikhet på händelser som ju är *mängder* av utfall. Så vi skapar ytterligare en definition för detta:

Definition: Låt S vara ett givet ändligt utfallsrum med en individuell sannoliketsfunktion p. *Sannolikhetsfunktionen* P på S är då funktionen $P : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ given av

$$P(E) = \sum_{x_i \in E} p(x_i).$$

Sannolikhetsfunktionen P bildas alltså genom att för en händelse (mängd) summera de individuella sannolikheterna av alla utfall som ingår i mängden. Eftersom summan av alla individuella sannolikheter i hela utfallsrummet S är 1 (enligt kraven i den föregående definitionen) gäller för alla händelser $E \subset S$ att

$$0 \leq P(E) = \sum_{x_i \in E} p(x_i) \leq \sum_{x_i \in S} p(x_i) = \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

också eftersom alla individuella sannolikheter är positiva. Så vi kan konstatera att definitionerna ovan ger att $P : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ som vi tidigare uttalade var en viktig egenskap.

Vi ska samla de viktiga egenskaperna för sannolikhetsfunktionen i en sats, men innan det ska vi införa en term till via en definition:

Definition: Låt S vara ett utfallsrum med tillhörande sannolikhetsfunktion P. Då refererar vi till S tillsammans med sannolikhetsfunktionen P som ett *sannolikhetsrum*.

Sats: Låt S vara ett sannolikhetsrum med sannolikhetsfunktionen P. För alla händelser $A, B \in S$ gäller då:

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
2. $P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$ samt $P(S) = 1$ och
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Vi ska referera till dessa tre egenskaper som ”ettan” ”tvåan” och ”trean” och vi ska ge ordentliga bevis för allihop. Men parallellt med att vi ger bevisen det ska vi också ge beskrivningar och tolkningar av vad egenskaperna innebär. För att bättre kunna formulera oss i beviset antar vi att $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, det vill säga att antalet utfall i S är n och att de betecknas med $x_1, \ldots, x_n$.

Bevis av tvåan: Vi ska visa tre saker: $P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$ samt $P(S) = 1$. Men den första egenskapen, $P(A) \leq 1$, fann vi redan en motivering för precis efter definitionen av sannolikhetsfunktionen så det är klart. Den andra egenskapen, $P(\emptyset) = 0$, följer också direkt av definitionen av sannolikhetsfunktionen,

$$P(\emptyset) = \sum_{x_i \in \emptyset} p(x_i) = \text{en summa utan termer} = 0$$

eftersom en summa som inte har några termer alltid måste vara 0, det är så som summor fungerar.
Den sista egenskapen, $P(S) = 1$, följde också av definitionen av sannolikhetsfunktionen ovan.

Vi har nu visat tvåan och innan vi går vidare ska vi ge några kommentarer. Vi tolkar dessa egenskaper som att något utfall alltid måste inträffa, det vill säga någon händelse måste alltid inträffa och det är S själv betraktat som händelse. Det är därför S själv tilldelas sannolikheten 1. Omvänt tilldelas tomma händelsen (att inget utfall inträffar) sannolikheten 0. Något utfall inträffar alltid. Om vi har ett experiment där ett utfall inträffar som vi inte har med i vårt utfallsrum så har vi per definition inte ett sannolikhetsrum och då måste vi bygga en ny modell av verkligheten för att kunna dra slutsatser med hjälp av sannolikhetsläran.

Bevis av ettan: Vi ska nu visa att $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ gäller där A och B är godtyckliga händelser i S. Men vi gör detta i två steg, vi visar först ettan under antagandet att A och B är disjunkta, alltså för situationen då det inte finns något gemensamt utfall för A och B. Vi antar alltså att A och B är godtyckliga händelser med

$$A \cap B = \emptyset.$$

Då har vi, enligt tvåan (som vi just visat) att $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ så det vi ska visa är $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Vi inför nya beteckningar för utfallen i A respektive B enligt

(1) $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, respektive
(2) $B = \{b_1, \ldots, b_j\}$.

Då har vi alltså $k + j = n$ och $S = \{x_1, \ldots, x_n\} = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_1, \ldots, b_j\} = A \cup B$. Enligt definitionen av sannolikhetsfunktionen har vi då

$$P(A \cup B) = \sum_{x \in A \cup B} p(x) = \sum_{x \in \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_1, \ldots, b_j\}} p(x) = \sum_{x \in A} p(x) + \sum_{x \in B} p(x) = P(A) + P(B)$$

vilket visar ettan då $A \cap B = \emptyset$. Anledningen att vi kunde slå isär summan $\sum_{x \in A \cup B} p(x)$ i de två summorna $\sum_{x \in A} p(x)$ och $\sum_{x \in B} p(x)$ var ju precis att det inte fanns några gemensamma utfall mellan A och B så att vi i $\sum_{x \in A} p(x) + \sum_{x \in B} p(x)$ inte räknar någon individuell sannolikhet dubbelt. Men vi ska ju visa ettan utan några extra krav och det gör vi på följande sätt:

Skriv om $A \cup B$ som $A \cup (B - A)$. Eftersom mängderna A och $B - A$ är disjunkta så kan vi använda ettan *för disjunkta händelser* på dessa två mängder så att vi får

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A).$$

Nu skriver vi om B som $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ och eftersom $A \cap B$ och $B - A$ är disjunkta så har vi

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A).$$

Men då kan vi skriva $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ och detta insatt i ekvationen ovan ger oss
$$P(A\cup B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
och beviset av ettan är klart.

Observera likheten med principen för inklusion och exklusion som här också kan användas och vi kan alltså även dra slutsatsen
$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$
Vi kommer också att kunna ha sannolikhetsidentiteter av högre ordning så att vi för tre händelser $A,B,C\subset S$ har formeln
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
som förstås är helt i analogi med principen för inklusion och exklusion med tre mängder. Vi avstår dock från att ge ett bevis av detta nu.

Innan vi visar trean ska vi göra en definition. I trean talar vi om händelsen A^c, alltså den händelse som består av alla utfall som ingår i komplementet till A. Den här händelsen uppfattar vi då förstås som att händelsen A *inte* inträffar. Vi ger dess namn i en definition:

Definition: Låt A vara en händelse i ett sannolikhetsrum S med sannolikhetsfunktion P. Då kallas A^c för *komplementet* till A eller *komplementhändelsen* till A.

Bevis av trean: Vi ska visa att $P(A)+P(A^c)=1$. Men eftersom A och A^c inte har några gemensamma utfall och tillsammans utgör hela S har vi, enligt tvåan och ettan
$$P(A)+P(A^c)=P(A\cup A^c)=P(S)=1$$
vilket fullbordar beviset av trean.

I sannolikhetsteoretiska problemställningar är ibland komplementhändelsen till A mycket enklare att hantera än A själv som vi senare ska se.

Vi kan också tolka formeln $P(A)+P(A^c)=P(S)=1$ som att det alltid är säkert, för alla händelser A att antingen inträffar A eller så inträffar A^c. Men detta har ju också kopplingar till logiken, om vi sätter utsagan p="A inträffar" så är ju $\neg p$ samma sak som "A inträffar *inte*", vilket ju är ekvivalent med att A^c inträffar. Och $P(A)+P(A^c)=P(S)=1$ blir då en sannolikhetsteoretisk avspegling av att utsagan
$$p\vee\neg p$$
alltid är sann för alla utsagor p.

Vi kan också gå tillbaka till vårt exempel med de två myntsinglingarna och betrakta de två händelserna

E = "*de båda myntens resultat är olika*"
F = "*de båda myntens resultat är samma*"

dessa två händelser är uppenbart komplementhändelser till varandra och vi har tidigare funnit att $P(E)=P(F)=0.5$. Eftersom de är komplementhändelser har vi alltså
$$E^c=F \qquad \text{och} \qquad F^c=E$$
och sista satsen stämmer alltså eftersom
$$P(E)+P(E^c)=P(E)+P(F)=0.5+0.5=1.$$
Vi ska införa ett begrepp till:

Definition: Låt $A_1,\ldots,A_n$ vara en följd av händelser i ett givet utfallsrum S. Om $A_i\cap A_j=\emptyset$ för alla $i\neq j$ så kallas händelserna $A_1,\ldots,A_n$ *parvis disjunkta.*

Sats: Låt $A_1,\ldots,A_n$ vara en följd av parvis händelser i ett givet sannolikhetsrum S med sannolikhetsfunktion P. Då gäller
$$P(A_1\cup\ldots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$
Beviset kan genomföras med matematisk induktion och lämnas som övning. Denna sats är förstås en sannolikhetsteoretisk motsvarighet till additionsprincipen från kapitlet om kombinatorik.

Övningar

9.3.1 Om du kastar två sexsidiga tärningar, var är sannolikheten att du får en jämn summa eller en summa större än 8?

9.3.2 I föregående övning, inför händelserna $E =$ *jämn summa* och $F =$ *summa 8 eller mera*. Sannolikheten i föregående uppgift kunde uttryckas som sannolikheten av $E \cup F$, det vill säga $P(E \cup F)$. Varför är denna sannolikhet inte lika med $P(E) + P(F)$?

9.3.3 Låt E, F, G vara tre händelser i ett utfallsrum. Uttryck $P(E \cup F \cup G)$ med hjälp sannolikheter av händelserna E, F, G och snitt mellan dem. Vad påminner detta om från föregående kapitel?

9.3.4 Från en vanlig kortlek tar vi ett kort. Vad är sannolikheten att kortet är ett ess eller är svart?

9.3.5 Ge en formel för $P(E \cup F \cup G \cup H)$ där E, F, G, H är händelser i ett utfallsrum.

9.3.6 Två sexsidiga tärningar kastas. Vad är sannolikheten att någon av dem visar en sexa?

9.3.7 Från en vanlig kortlek tas ett kort. Beräkna följande sannolikheter:

a) Kortet är ett ess.
b) Kortet är ett ruter.
c) Kortet är ett ess eller ett ruter.

9.3.8 Låt A och B vara två händelser med $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.8$ och $P(A \cup B) = 0.85$. Beräkna

a) $P(A \cap B)$
b) $P(B - A)$
c) $P(A - B)$
d) Sannolikheten att *exakt* en av A och B inträffar – alltså inte båda.

9.3.9 I en tillverkningsprocess kan två slags fel inträffa, F_1 och F_2. Det är 10% risk att F_1 inträffar och 15% risk att F_2 inträffar och 5% risk att båda felen inträffar. Beräkna sannolikheten att

a) något av felen inträffar,
b) F_1 inträffar, men inte F_2,
c) F_2 inträffar, men inte F_1,
d) exakt ett av felen inträffar – alltså inte båda.

4. Kombinatorik och likformig sannolikhetsfördelning

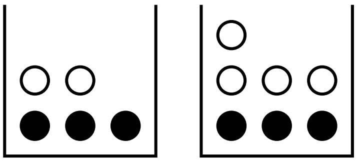
Vi kommer att ha stor nytta av kombinatoriken när vi studerar sannolikheter. Vi har redan sett att additionsprincipen och principen för inklusion och exklusion förekommer i sannolikhetsteoretisk tappning i förgående avsnitt. Vi ska nu se hur olika urvalsprocesser (det här med dragning med och utan återläggning, med och utan hänsyn till ordning) uttrycks i sannolikhetsläran.

I problemställningar i sannolikhetslära är vi ofta förtjusta i att formulera så kallade *urnproblem.* I kombinatoriken formulerades något liknande i termer av lådor. Dessa modeller är i grunden väldigt liknande varandra och ofta kan en urnmodell omvandlas till en lådmodell.

Vi tar ett exempel på ett urnproblem.

Exempel: Det är givet två urnor, U_1 och U_2. Den första urnan innehåller tre svarta kulor och två vita. Den andra urnan innehåller tre svarta kulor och fyra vita kulor. Vi drar först en kula från den första urnan (U_1) och sedan två kulor ur den andra (U_2) utan återläggning. Beräkna sannolikheten att de tre kulorna har samma färg.

Vi kan representera situationen med urnorna med en bild.



U_1 U_2

Lösning: Vi inför händelsen A som händelsen att de tre kulorna har samma färg. Vidare inför vi händelserna B och C som

B = händelsen att de tre kulorna som drogs på det angivna sättet alla är vita.
C = händelsen att de tre kulorna som drogs på det angivna sättet alla är svarta.

Händelserna B och C är uppenbarligen disjunkta och utgör tillsammans A så kan konstatera att $P(A)$, som vi söker, kan skrivas som

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(\emptyset) = P(B) + P(C) - 0 = P(B) + P(C).$$

Vi ska snart beräkna $P(B)$ och $P(C)$ med vanliga kombinatoriska resonemang. Vi har gjort detta tidigare men innan vi gör det ska vi införa någonting som skapar en tydlighet kring vad vi gör rent sannolikhetsteoretiskt. Vi ger först en definition.

Definition: Ett ändligt sannolikhetsrum S med n utfall som vi benämner $x_1, x_2, \ldots, x_n$ säges ha en *likformig sannolikhetsfördelning* om alla utfall i S är lika sannolika, det vill säga om alla utfall har samma individuella sannlikhet, alltså

$$p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_n).$$

I definitionen refererar vi alltså till de individuella sannolikheterna för alla utfall och eftersom summan av alla utfall i ett utfallsrum är 1 så drar vi slutsatsen att

$$p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_n) = \frac{1}{n}.$$

I urnproblem brukar det vara underförstått att alla kulor dras med samma sannolikhet. Om vi då betecknar alla utfall hörande till en viss händelse H med $u_1, \ldots, u_m$ så beräknar vi sannolikheten för händelsen genom att summera alla ingående individuella sannolikheter för alla utfall som hör till händelsen, vi har alltså, enligt definitionen av sannolikhet:

$$P(H) = \sum_{k=1}^{m} p(u_k).$$

Men eftersom vi rör oss i ett utfallsrum med en likformig sannolikhetsfördelning där alla utfall har sannolikheten säg $1/n$ (om det totala antalet utfall är n) så är alla individuella sannolikheter av alla utfall i H också lika med $1/n$ och vi har

$$P(H) = \sum_{k=1}^{m} p(u_k) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

och det är bakgrunden till att vi beräknar sannolikheter som kvoter. Om vi uppfattar vårt utfallsrum som hörande till någon process som kan göras på ett visst antal sätt (n sätt) och vår händelse som vi vill beräkna sannolikheten för (H med utfallen $u_1, \ldots, u_m$) så bildar vi alltså kvoten

$$\frac{m}{n}$$

som då uppfattas som antalet sätt att utföra processen så att H inträffar dividerat med totala antalet sätt att utföra processen. Vi kan också benämna detta ”antalet gynnsamma utfall dividerat med totala antalet utfall”. Detta är begrepp som *bara* gäller då vi har en likformig sannolikhetsfördelning, det vill säga då alla utfall är lika sannolika.

Att beräkna sannolikheterna för händelserna som vi inför ovan innebär alltså att beräkna kvoter: antalet gynnsamma utfall (m) dividerat med totala antalet utfall (n).

Vi illustrerar detta med händelsen B ovan (tre vita kulor) så ska vi se att det egentligen inte är någon nyhet: vi förutsätter ofta en likformig sannolikhetsfördelning.

Vi vill alltså beräkna sannolikheten av att om vi tar upp en kula från urna 1 (med två vita och tre svarta kulor) och därefter, utan återläggning, två kulor ur urna 2 (med tre svarta och fyra vita) vi får tre vita kulor. Vi beräknar detta som kvoten

$$\frac{m}{n}$$

där m är antalet sätt att ta upp tre kulor på det som anges (en ur första och två ur andra utan återläggning) och verkligen få tre vita kulor och n är totala antalet sätt att ta upp tre kulor på det sätt som anges.

Antalet gynnsamma utfall, alltså m är antalet sätt att plocka kulor på det angivna sättet och det kan vi beränkna med vanlig kombinatorik. Vi använder multiplikationsprincipen och ser tagandet av de tre kulorna som en process i tre steg:

(1) Tag kula 1 ur urna 1. Den ska vara vit så första steget kan utföras på 2 sätt (eftersom det finns 2 vita kulor där).
(2) Tag kula 2 ur urna 2. Den ska också vara vit och eftersom det finns 4 vita i urna 2 vid andra steget finns det 4 sätt att ta en vit kula.
(3) Tag kula 3 ur urna 2. I det här läget finns 3 vita kvar så det finns 3 sätt att ta en vit kula till så antal sätt som sista steget kan utföras på är 3.

Enligt multiplikationsprincipen blir alltså antalet sätt ta 3 vita kulor på det föreskrivna sättet lika med

$$2 \cdot 4 \cdot 3$$

och det är det här talet som vi kallat m i formeln ovan. Vi har alltså $m = 24$.

Vi går vidare och beräknar n, alltså totala antalet utfall i experimentet, alltså totala antalet sätt att ta kulor på det angivna sättet, men utan kraven på att alla ska vara vita, det vill säga att utfallen nödvändigtvis ska ingå i den händelse vi beräknar sannolikheten för. Vi kan återigen se valet av kulor som en process i tre steg och använda multiplikationsprincipen:

(1) Tag kula 1 ur urna 1. Vilken som helst av de 5 kulorna kan tas så första steget kan utföras på 5 sätt.
(2) Tag kula 2 ur urna 2. Återigen finns inga krav på hur den ska tas så vilken som helst av de 7 gå bra. 7 sätt.
(3) Tag kula 3 ur urna 2. Nu är det 6 kulor kvar så det är 6 sätt att ta sista kulan.

Och, vi sammanfattar som förut, totala antalet utfall i sannolikhetsrummet som vi studerar, talen n, nämnaren i kvoten som ger oss $P(B)$ blir

$$5 \cdot 7 \cdot 6.$$

(Eftersom detta tal ska ingå en kvot så behöver vi inte räkna ut precis vad det blir, vi ska ju ändå förkorta bort en massa faktorer.)Nu kan vi beräkna $P(B)$ och vi får alltså

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{24}{5 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4}{35}.$$

Läsaren får själv beräkna $P(C)$ och de beräkningarna ska ge resultatet $3/35$ och sannolikheten för A, alltså att kulor som dras på det sätt som angavs alla ska ha samma färg blir

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{4}{35} + \frac{3}{35} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5} = 0.20 = 20\%.$$

Vi ska nu poängtera ett *mycket* viktigt underförstått antagande som gjorts i ovanstående beräkningar. Vi har funnit sannolikheter som kvoter, m/n, men vi har inte tydligt beskrivit hur det underliggande utfallsrummet ser ut, hur de inviduella utfallen har karakteriserats och därmed har vi faktiskt gjort våra beräkningar med en vag uppfattning om hur händelserna egentligen har beskrivits. Det är tydligast i andra och tredje steget i tillämpningen av multiplikationsprincipen, det stod där

...
(2) Tag kula 2 ur urna 2. Den ska också vara vit och eftersom det finns 4 vita i urna 2 vid andra steget finns det 4 sätt att ta en vit kula.
(3) Tag kula 3 ur urna 2. I det här läget finns 3 vita kvar så det finns 3 sätt att ta en vit kula till så antal sätt som sista steget kan utföras på är 3.

och nu kan vi rikta en kritik mot den här beskrivningen: om vi ska ta 2 vita kulor ur en population av 4 vita kulor och alla är att betrakta som identiska, då är väl antalet sätt att ta dessa identiska kulor lika med $\binom{4}{2}$ och inte $4 \cdot 3$ som ju är $P(4, 2)$? Vad ska vi ha? En binomialkoefficient eller antalet 2-permutationer?

Svaret på den här frågeställningen är att när vi tecknat beräkningarna av sannolikheterna med tillämpning av multiplikationsprincipen sär det ytterligare tydliggjort att vi antar att det underliggande utfallsrummet befattar sig med händelser som innebär plockandet av kulor ur urnorna *där ordningsföljden är medräknad.* I själva vårt utfallsrum räknar vi alltså inte kulorna som identiska utan vi uppfattar dem som olika. Vi kan byta perspektiv och lösa samma problem med binomialkoefficienter. Skillnaden är att vi få andra värden på m och n men när vi bildar de slutliga kvoterna så blir ändå svaret detsamma. Vi genomför dessa beräkningar för tydlighetens skull.

Alternativ lösning: Betrakta nu tagandet av kulor med hjälp av binomialkoefficienter istället. Multiplikationsprincipen är fortfarande aktuell och för att beräkna $P(B)$ studerar vi antalet sätt att välja de tre vita kulorna från urnorna utan medräknad ordning.

(1) Tag först kula 1 från urna 1, eftersom det är 2 vita att välja på så kan den första kulan tas på $\binom{2}{1} = 2$ sätt. Detta råkar sammanfalla med antalet sätt att ta första kulan då ordningen *är* medräknad.
(2) Tag nu de båda andra vita kulorna från de 4 vita i andra urnan, eftersom det är frågan om att ta 2 från 4 utan ordning medräknad kan detta ske på $\binom{4}{2} = 6$ sätt.

Vi har bara två steg i urvalsprocessen denna gång och vårt m blir nu $2 \cdot 6 = 12$. Vi går vidare och beräknar n, alltså totala antalet sätt att välja kulor (en fån U_1 och två från U_2) och det blir

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2} = 5 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 3.$$

Och slutligen bildar vi kvoten m/n för att få $P(B)$ och den blir

$$\frac{12}{5 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{4}{35}$$

som förstås överenstämmer med vårt tidigare resultat.

När det gäller problemställningar vid likformig sannolikhetsfördelning är det bara att använda den kombinatorik vi redan utvecklat. Dock har, som sagt, ibland formuleringarna i sannolikhetsläran med termen ”urna” istl̈let för ”lådor” som vi sett i kombinatoriken. Självklart är det i grunden ingen principiell skillnad. Vi studerar detta genom att ge ett antal exempel. Väl att minnas är förstås också det här med att när vi beräknar kvoter av typen m/n måste både täljaren m och nämnaren n ha beräknats utgående från samma utfallsrum vilket konkret betyder att vi antingen modellerar allt med hänsyn tagen till ordningsföljder, och då involverar beräkningarna av m och n antalet k-permutationer, alltså uttryck av typen $P(n,k)$ och den andra möjligheten är att beräkningarna av m och n bygger på ett utfallsrum där vi inte tar hänsyn till ordningsföljder, och då använder vi binomialkoefficienter (alltså uttryck av typen $\binom{n}{k}$) i beräkningarna.

Exempel: En vanlig kortlek blandas och 10 kort tas slumpvis ut utan återläggning. Ange sannolikheten för att det finns tre ess bland de 10 korten.

Lösning: Halva lösningen består ofta i att välja ett bra utfallsrum eller modell av problemställningen. En modell kan skapas genom att vi betraktar kortleken som en rad av 52 kortplatser. Att ”ta ut 10 kort” kan vi anse som att vi säger att vi anser att 10 av kortplatserna har en speciell status: detta är de 10 utvalda korten. Vi kan då skapa en mental bild av situationen, 52 kort symboliseras med ringar, de 10 utvalda korten till vänster, symboliseras med gråfärgade ringar:

●●●●●●●●●●○○

och vi skapar nu en modell av situationen genom att säga att vi är intresserade av fyra kort bland dessa 52 nämligen essen och hur de placeras. Vi frågar efter sannolikheten att precis tre av essen är placerade bland de utvalda korten, och den sökta sannolikheten blir alltså $\frac{m}{n}$ där m är antalet sätt att placera ut tre av essen bland de 10 utvalda korten och det återstående esset bland de 42 andra kortplatserna. Talen n blir antalet sätt att placera ut essen hur som helst och det är $\binom{52}{4}$ (i det här exemplet tar vi alltså *inte* hänsyn till essens ordningsföljd). Talet m bildas också som en produkt av talen $\binom{10}{3}$ som är antalet sätt att välja de tre platserna bland de 10 utvalda korten som ska vara ess, och talet 42 (som kan uppfattas som $\binom{42}{1}$) som anger antalet sätt att välja ut var det sista esset ska vara bland de 42 andra korten. Alltså blir vår sökta sannolikhet

$$\frac{m}{n} = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{42}{1}}{\binom{52}{4}} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 42}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 42}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6}{13 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{144}{7735} = 1.86\%.$$

Lägg som sagt märke till att vi inte behöver ta någon hänsyn till ordningsföljder, vare sig bland de utvalda platserna som ska ha ess, eller vilken inbördes ordning som essen har, vi väljer egentligen bara kortplatser för essen utan att räkna något om vilket ess som hamnar vart. Det är därför det här problemet involverar binomialkoefficienterna som ju inte tar hänsyn till ordningsföljder.

Kommentar: Vi relaterar nu den här lösningen till hur det hade sett ut om vi hade tagit hänsyn till ordningsföljden. Vi valde en modell där de fyra kortplatserna inte tog någon hänsyn till hur de olika essen var placerade. Vi betraktade då bara ett abstrakt sätt att placera ess. Om vi istället hade gått ner på en detaljnivå där vi tagit hänsyn till essens ordningsföljd skulle vi fått andra m och n i våra beräkningar. Talet m skulle då varit antal sätt att, med ordningen medräknad, placera ut de fyra essen och det skulle varit

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{42}{1} \cdot 4!$$

eftersom vi kan se antalet sätt att placera ut essen som $\binom{10}{3} \cdot 42 =$ antalet sätt som det finns att välja ut de fyra platser som essen ska placeras på, multiplicerat med $4! =$ antalet sätt som det finns att inbördes omordna de fyra essen. Det viktiga att observera här är då att precis samma faktor, 4!, (som indikerar att vi tar hänsyn till ordningen i vårt utfallsrum) uppkommer i nämnaren, så att n här blir

$$\binom{52}{4} \cdot 4!$$

som alltså är antalet sätt att välja de 4 platser där essen placeras och sedan multiplicerat med antalet sätt att omordna dem (4!). Samma faktor uppkommer i täljare och nämnare och förkortas alltså bort så att vi givetvis får samma sannolikhet som svar på vår fråga även om vi valt ett annat utfallsrum som egentligen då förstås bara är ett alternativt sätt att tänka om samma frågeställning.

Exempel: I ett rum med 23 personer, beräkna sannolikheten att minst två personer fyller år på samma dag. (Vi antar att ingen fyller år på skottdagen och att det inte är skottår.)

Lösning: Vi inför händelsen A att två personer har födelsedag på samma dag. Det här är ett typiskt fall då det är lättare att studera komplementhändelsen A^c, alltså att alla 23 personerna har födelsedagar på *olika* dagar. Vi kan nämligen då beräkna sannolikheten som en kvot igen, m/n, där m är antalet sätt att välja födelsedagar tillordnade de 23 personer så att inga födelsedagar sammanfaller. Vi kan göra detta val för de 23 personerna i en viss ordning. Det blir 23 val av födelsedagar och valet av första personens födelsedag kan göras på 365 sätt, eftersom inga andra födelsedagar är valda. Andra personens födelsedag kan då väljas på 364 sätt eftersom vi inte får välja samma födelsedag som den första personen har. På samma sätt blir nästa antal valmöjligheter 363 och så vidare ner till person nummer 23 vars födelsedag kan väljas på 343 olika sätt för att inte sammanfalla med någon av de 22 tidigare personerna. Multiplikationsprincipen ger alltså att m blir

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 344 \cdot 343.$$

Talet n (som ska bilda kvoten i sannolikhetsberäkningen) blir då antalet sätt att välja födelsedagar för de 23 personerna utan några som helst inskränkningar, vilket förstås blir 365^{23}. Detta svarar mot kombinatoriska uttryck från kapitlet om kombinatorik. Talet m som vi bildar som ovanstående produkt svarar mot talet som bildas för antal val av "högst en kula i varje låda vid placering av kulor i en följd av numrerade lådor" − i kapitlet om kombinatorik kallades detta tal $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ och vid närmare inspektion av uttrycket ser vi att det kan skrivas som $\frac{365!}{342!}$. Talet n, som bildas som potensuttrycket 365^{23} svarar mot det tal som bildas som antal val av "hur många kulor som helst i ett antal numrerade lådor".

Sannolikheten för A^c kan nu beräknas till

$$\frac{365!}{342! \cdot 365^{23}} = 0.4927$$

och därför får vi $P(A) = 1 - P(A^c) = 50.73\%$. Det är alltså ungefär 50% chans i en grupp med 23 personer att två personers födelsedagar sammanfaller. Vad det nu finns för nytta att veta det! Men det kan ändå vara intressant att se på den sannolikheten för att belysa hur våra förutfattade meningar kring vad som är sannolikt fungerar. Läsaren inbjuds att överväga vad hen anser att sannolikheten att två personers födelsedagar sammanfaller i en grupp på 23 personer och jämföra med det korrekta resultatet (som alltså tydligen ligger på runt 51%).

Exempel: Beräkna sannolikheten att ett slumpvis valt tal bland de 10000 första positiva heltalen inte är jämnt delbart med något av talen 2, 3 eller 5.

Lösning: Detta exempel ansluter till exemplet där vi beräknade antalet tal i mängden $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10000\}$ (alltså de första 10000 positiva heltalen) som inte är delbara med 2, 3 eller 5. Efter en utredning som involverade användning av principen för inklusion och exklusion beräknades detta tal till 2333. Tre mängder A, B, C

infördes enligt $A = \{x \in \Omega; 2|x\}$, $B = \{x \in \Omega; 3|x\}$ and $C = \{x \in \Omega; 5|x\}$ och antalet tal som *inte* var delbart med något av talen 2, 3 eller 5 befanns vara

$$10000 - k$$

där $k = |A \cup B \cup C|$ och det var just storheten $|A \cup B \cup C|$ som beräknades med principen för inklusion och exklusion enligt

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

i övningarna leds läsaren att formulera en lösning till detta problem baserat på detta tidigare exempel.

Övningar

9.4.1 Från en vanlig kortlek tas tre kort utan återläggning. Berk̈na sannolikheten för att

a) alla tre kort är hjärter,
b) inget av korten är hjärter,
c) alla tre kort har samma färg,
d) alla tre kort är av valören 10.

9.4.2 Från en vanligt kortlek tas tre kort utan återläggning. Vad är sannolikheten att dessa tre kort alla är i intervallet 2-10 och utgör en så kallad *stege*, det vill säga deras valörer är på varandra följande värden? (Exempelvis: klöver 4, ruter 5, hjärter 6.) (Kortens ordningsföljd i vilken de dras räknas inte, så det räknas som en stege om 5:an kommer först, sedan 4 och sist 6:an.)

9.4.3 Från en vanligt kortlek tas tre kort utan återläggning. Vad är sannolikheten att dessa tre kort alla är i intervallet 2-10 och utgör en så kallad *stege i färg*, det vill säga deras valörer är på varandra följande värden och att de alla är av samma färg? (Exempelvis: klöver 4, klöver 5, klöver 6.) (Återigen räknas inte ordningsföljden i vilken korten dras.)

9.4.4 Om tre tärningar kastas, vad är sannolikheten att

a) alla visar lika? (Till exempel tre fyror.)
b) alla visar olika? (Till exempel en etta, en tvåa och en femma.)

9.4.5 En urna innehåller fem vita kulor och två svarta kulor. Två kulor dras slumpmässigt. Beräkna sannolikheten att de har olika färg om dragningen sker

a) utan återläggning,
b) med återläggning.

9.4.6 En så kallad tipsrad består av 13 symboler som vardera är 1, x eller 2. Om vi antar att alla utfall är lika sannolika, alltså alla tipsrader förekommer lika ofta, vad är då sannolikheten att få

a) 13 rätt?
b) de 12 första matcherna rätt men den sista fel?
c) 12 rätt?
d) precis 1 rätt?

(Ettor brukar vara mer sannolika eftersom det representerar att hemmalaget vinner.)

9.4.7 Beräkna sannolikheten att vid dragning av fem kort från en kortlek vi får ess, kung, dam, knekt, tio i samma färg, (en så kallad *Royal Straight Flush*).

9.4.8 Beräkna sannolikheten att om vi får 10 kort från en kortlek, 2 är spader, 3 är hjärter, 1 är ruter och 4 är klöver.

5. Betingad sannolikhet

I detta avsnitt ska vi införa någonting som heter *betingad sannolikhet*. Ordet ”betingad” betyder ”villkorad” och den engelska termen för betingad sannolikhet är *conditional probability*, så det här skulle kunna ha namnet ”villkorlig sannolikhet” istället.

Betingad sannolikhet kommer ge oss en djupare förståelse för hur noggranna vi verkligen måste vara när vi modellerar verkligheten med sannolikhetsteori. Vi tar ett illustrerande exempel som är baserat på en utmärkt film från *Youtube* som heter *The Bayesian Trap* av *Veritasium.*

Exempel: En av 1000 personer har en otrevlig sjukdom som vi kan kalla Q. Det finns ett medicinskt test T som används för att ställa diagnosen för Q men medicinska tester är inte perfekta och T ger ett positivt resultat i 99% av alla gånger som det används på folk med sjukdomen Q, men i 1% av fallen som det används på friska personer ger den ett felaktigt positivt resultat, det vill säga positivt även om personen som testas ändå inte har sjukdomen Q.

Frågan är nu, om en person, vi kan kalla honom Kalle, får ett positivt resultat från testet T. Vad är då sannolikheten att Kalle verkligen har sjukdomen Q? Vi kanske först spontant tänker att eftersom testet identifierar 99% av de som har sjukdomen så måste det väl vara 99% chans att ett positivt testresultat innebär att Kalle har Q? Men så är det inte! Vi börjar med att formulera frågan mer noggrannt:

Fråga: Om Kalle får positivt resultat från testet T, vad är sannolikheten att Kalle har sjukdomen Q?

För att illustrera betydelsen av "betingad sannolikhet" eller "villkorad sannolikhet" så kan vi formulera om frågan igen:

Fråga: Under förutsättning att Kalles testresultat är positivt, vad är sannolikheten att Kalle har sjukdomen Q?

Vi söker alltså en sannolikhet *under en viss förutsättning*, eller *under ett visst villkor* och detta villkor är att testet T visar ett positivt resultat. Vi inför två händelser:

Q = händelsen "Kalle har sjukdomen Q" och
T = händelsen "testet T visar positivt resultat för Kalle".

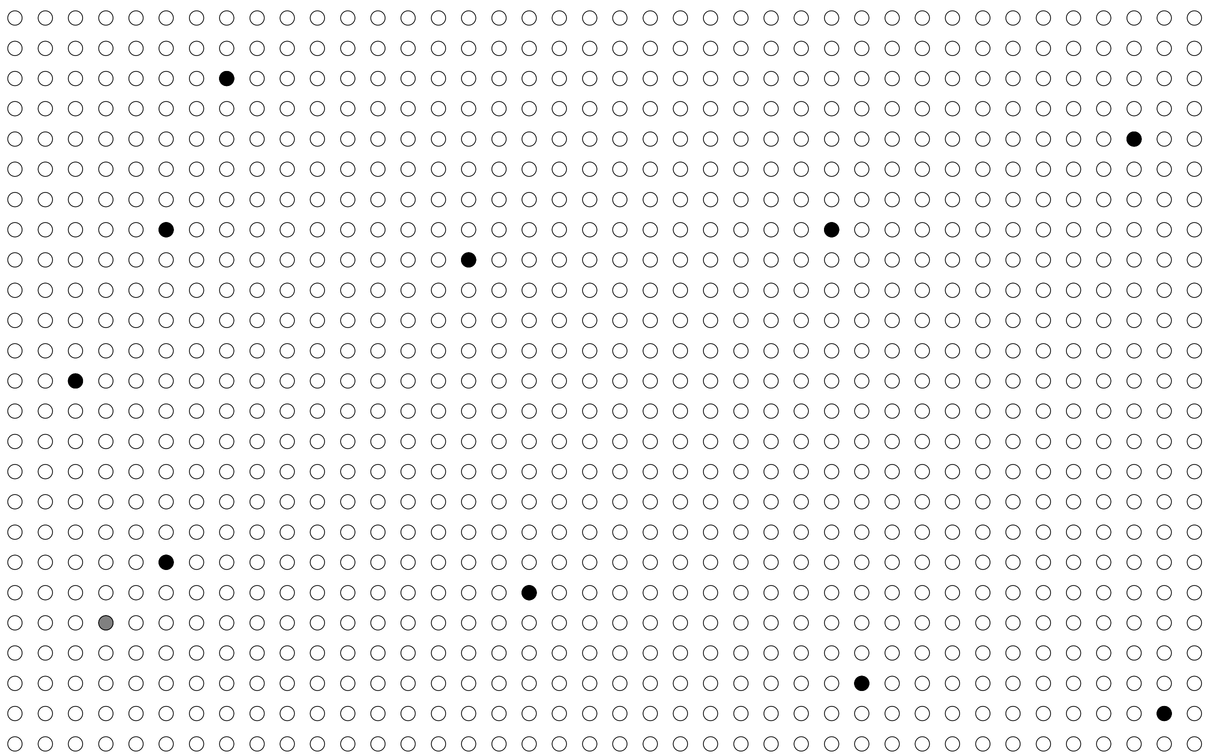
Vi söker alltså sannolikheten av att Q inträffar *under förutsättning* att T har inträffat. Denna sannolikhet betecknar vi med

$$P(Q|T)$$

och det utläses *sannolikheten att Q inträffar givet att T inträffat* eller *den betingade sannolikheten för Q givet T.*

Vi ska nu räkna ut $P(Q|T)$.

Vi betraktar ett representativt urval av befolkningen på 1000 personer.



Det är totalt 1000 prickar som symboliserar ett representativt urval ur befolkningen. En av 1000 har sjukdomen och den olyckliga personen symboliseras med den gråa pricken. Alla de vita prickarna symboliserar folk som är friska. De svarta prickarna symboliserar också folk som är friska, men som testet visar felaktigt positivt resultat för, det är 1% chans att testet visar fel och dessa olyckliga 10 symboliseras alltså av de svarta prickarna.

Vi återvänder nu till vår frågeställning: hur stor sannolikhet är det att Kalle har sjukdomen Q givet att testet T gett ett positivt resultat? Vad är alltså $P(Q|T)$?

Om vi tänker närmare på detta så inser vi att det faktum att Kalle fått ett positivt resultat på testet innebär att Kalle inte är en av de 989 friska personerna som testet get negativt resultat för (de vita prickarna). Kalle är i själva verket en av de svarta prickarna (han har alltså ett felaktigt positivt resultat) eller så är Kalle den gråa pricken (han har alltså sjukdomen Q).

Vi har alltså ett betydligt *mindre* utfallsrum som består av 11 personer som utgörs av de 10 personer (de svarta prickarna) för vilket testet ger fel svar och den enda person som verkligen är sjuk. Så vårt nya utfallsrum kan alltså symboliseras med 11 prickar.

Någon av dessa 11 personer är sjuk, men de andra har fått felaktiga resultat från testet! Det är alltså 1 på 11 att Kalle verkligen är sjuk om Kalle fått ett positivt resultat så det är alltså 9% risk att Kalle verkligen har sjukdomen.

När vi ställer en fråga som involverar betingad sannolikhet så byter vi alltså utfallsrum. Lägg märke till att det var inte de 1000 personerna som var utfallsrummet som vi använde för att hitta sannolikheten 9%, det var ett mindre utfallsrum. Vi skulle kunna säga så här:

Vi söker sannolikheten $P(Q|T)$ som är andelen personer som har sjukdomen Q givet att de testet T visat positivt resultat. Den sannolikheten kan vi se som en kvot:

$$\frac{\text{antalet personer som har sjukdomen som testet } T \text{ visar positivt för}}{\text{totala antalet personer som testet } T \text{ visar positivt för}}.$$

Hur beräknar vi denna kvot? Om vi uttrycker oss i sannolikheter så blir täljaren lika med talet

$$P(Q \cap T) \cdot \text{antalet personer i totala populationen.}$$

Om vi antar att de 1000 personerna är ett representativt urval så ändras inga sannolikheter för att vi studerar just de här 1000 personerna så vi kan anta att antalet personer i totala populationen är 1000. Och detta är alltså det ursprungliga utfallsrummet. Täljaren få då utseendet

$$P(Q \cap T) \cdot 1000.$$

Om vi med samma förutsättningar att de 1000 personerna är ett representativt urval så blir nämnaren lika med

$$P(T) \cdot 1000.$$

Så sammantaget har vi

$$P(Q|T) = \frac{P(Q \cap T) \cdot 1000}{P(T) \cdot 1000} = \frac{P(Q \cap T)}{P(T)}.$$

och detta är den allmänna formeln för betingad sannolihet.

Vi formulerar detta noggrannt i en definition:

Definition: Låt S vara ett sannolikhetsrum med sannolikhetsfunktionen P. För en given händelse A, med $P(A) > 0$, definierar vi, för alla händelser $B \subset S$, den *betingade sannolikheten för B givet att har A inträffat* som talet

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Vi ska se på hur betingad sannolikhet kan användas när vi undersöker mer komplicerade sannolikhetsteoretiska problemsällningar.

Exempel: Kim och Alex spelar poker och har fått fem kort var. Alex vet att Kim har ett ess men Alex själv har inte ännu tittat på sina kort. Vad är sannolikheten att Kim har ytterligare ett ess?

Lösning: Halva lösningen av en sådan här uppgift är att inför händelser som på ett korrekt sätt beskriver situationen. Det kan ibland vara svårt. Vi kan vara frestade att skriva

EE = händelsen "Kim har ett ess"
TE = händelsen "Kim har två ess".

och sedan tänka att vi är intresserade av att beräkna $P(TE|EE)$. Enligt definitionen av betingad sannolikhet är detta tal lika med

$$\frac{P(TE \cap EE)}{P(EE)}$$

Eftersom händelsen EE är inkluderad i händelsen TE så måste vi ha $TE \cap EE = TE$ så vi vill alltså beräkna

$$\frac{P(TE)}{P(EE)}.$$

Och härifrån kanske vi kan anse att vi kan räkna ut den sökta sannolikheten. Men det finns en svårighet här och vi behöver beskriva händelserna lite bättre. Den sannolikhet vi söker utifrån det händelseförlopp som är beskrivet är egentligen sannolikheten att Kim har ***minst** ett ess*. Så vår situation blir bättre modellerad om vi säger att händelserna EE och TE beskrivs av

EE = händelsen "Kim har *minst* ett ess"
TE = händelsen "Kim har *minst* två ess".

Ta en paus och fundera på vad skillnaden blir jämfört med den formulering som gavs ovan. Om vi skulle arbetat med den ursprungliga formuleringen kanske vi rent av skulle göra misstaget och tro att vi ska räkna med sannolikheten $P(EE)$ och uppfattar den som att det är sannolikheten för ***exakt** ett ess* och att $P(TE)$ ska representera ***exakt** två ess*. Då blir det fel. Dessa räkningar, som alltså är felaktiga, ser ut så här:

Sannolikheterna att Kim ska ha (exakt) ett ess respektive (exakt) två ess, det vill säga $P_{fel}(EE)$ respektive $P_{fel}(TE)$ är

$$P_{fel}(EE) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} \qquad \text{respektive} \qquad P(TE) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{50}{3}}{\binom{52}{5}}$$

och då vi bildar kvoten av dessa tal så förkortas $\binom{52}{5}$ bort så att vi får

$$P_{fel}(TE|EE) = \frac{P_{fel}(TE)}{P_{fel}(EE)} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{50}{3}}{4\cdot\binom{51}{4}} = \frac{6\cdot\frac{50\cdot49\cdot48}{3!}}{4\cdot\frac{51\cdot50\cdot49\cdot48}{4!}} = \frac{6}{51} \quad (= 11.7\%).$$

För att undvika detta problem behöver vi alltså vara mer precisa då vi formulerar våra händelser som beräkningarna baserar sig på. Låt alltså därför händelsen EE verkligen representera att Kim har *minst* ett ess och händelsen TE att Kim har minst två ess. Vi söker fortfarande sannolikheten

$$\frac{P(TE)}{P(EE)}$$

och vi kan börja med att räkna ut $P(EE)$. Det här är ett typiskt läge då det är lättare att arbeta med komplementärhändelsen, och alltså använda oss av att $P(EE) = 1 - P(EE^c)$. Och $P(EE^c)$ är ju då händelsen att Kim inte har något ess alls som blir $\binom{48}{5}/\binom{52}{5}$.

Nästa steg är att finna $P(TE)$ och den är tyvärr inte så enkel att finna. Vi kan dock finna den om vi inför tre andra händelser:

(1) EX_2=händelsen att "Kim får *exakt* två ess"
(2) EX_3=händelsen att "Kim får *exakt* två ess"
(3) EX_4=händelsen att "Kim får *exakt* två ess"

och så ser vi att eftersom händelserna EX_2, EX_3 och EX_4 är disjunkta och tillsammans utgör TE så kan vi skriva

$$P(TE) = P(EX_2) + P(EX_3) + P(EX_4).$$

Eftersom

$$P(EX_2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{50}{3}}{\binom{52}{5}}, \qquad P(EX_2) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{50}{1}}{\binom{52}{5}}, \quad \text{och} \quad P(EX_4) = \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{50}{0}}{\binom{52}{5}}$$

så kan vi beräkna den sökta sannolikheten $\frac{P(TE)}{P(EE)}$ som

$$\frac{P(TE)}{P(EE)} = \frac{P(TE)}{1-P(EE^c)} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{50}{3}/\binom{52}{5} + \binom{4}{3}\cdot\binom{50}{1}/\binom{52}{5} + \binom{4}{4}\cdot\binom{50}{0}/\binom{52}{5}}{1-\binom{48}{5}/\binom{52}{5}}.$$

Här förlänger vi täljare och nämnare med $\binom{52}{5}$ och uttrycket blir då lika med

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{50}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{50}{1}+\binom{4}{4}\cdot\binom{50}{0}}{\binom{52}{5}-\binom{48}{5}}=\frac{\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{50\cdot 49\cdot 48}{3\cdot 2\cdot 1}+4\cdot 50+1\cdot 1}{\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1}-\frac{48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{50\cdot 49\cdot 48+4\cdot 50+1}{52\cdot 51\cdot 10\cdot 49\cdot 2-47\cdot 46\cdot 9\cdot 44}$$

som vi räknar ut med en miniräknare, det blir ungefär 0.0676, alltså 6.76% chans vilket är ett annat resultat än det vi fick då vi hade felaktiga beskrivningar av händelserna EE och TE.

Med definitionen för betingad sannolikhet kan vi uttrycka $P(A\cap B)$ som $P(B|A)\cdot P(A)$ och det är användbart i beviset av en sats som kommer att hjälpa oss att gör falluppdelningar i sannolikhetsteoretiska problemställningar.

Sats: *Lagen om total sannolikhet.* Låt S vara ett sannolikhetsrum med sannolikhetsfunktionen P. Om händelserna $H_1,\ldots,H_n$ är parvis disjunkta och $S = H_1\cup\ldots\cup H_n$ (det vill säga $\{H_1,\ldots,H_n\}$ är en partitionering av S) så gäller, för varje händelse $A\subset S$ att

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A|H_k).$$

De olika händelserna $H_1,\ldots,H_n$ brukar kallas "hypoteser" och om vi säkert vet att någon av n stycken hypoteser säkert är uppfyllda (alltså $S = H_1\cup\ldots\cup H_n$) kan vi alltså beräkna sannolikheten för en viss händelse A baserat på de n olika möjliga fallen som kan gälla och sannolikheten blir då summan med n termer som står i satsen. Innan vi ger ett bevis för detta ska vi se på ett exempel.

Exempel: I ett samhälle delades invånarna in i tre grupper, A, B, C, där

A = alla med en inkomst över 400000 kr per år,
B = alla med en inkomst mellan 200000 kr och 400kkr per år och
C = alla med en inkomst lägre än 200000 kr per år.

Andelen invånare i gruppen A var 20% av alla i samhället, andelen i gruppen B var 50% och andelen invånare i gruppen C var 30%.

Undersökningar av dessa olika gruppers invånares sparvanor gjordes gjordes varvid man kom fram till att 70% av invånarna i grupp A hade mer än 100000 i besparingar, 40% av invånarna i grupp B hade mer än 100000 kronor i besparingar och slutligen att bara 10% av invånarna i grupp C hade mer än 100000 kronor i besparingar.

Vad är sannolikheten att en godtyckligt vald invånare har mer än 100000 i besparingar?

Lösning: En stor del av lösningen till problem i sannolikhetsteori är att införa rätt utfallsrum och händelser. Så vi tänker oss att vårt experiment består i att välja en invånare från samhället. Om vi betecknar mängden av alla invånare med U så kan vi införa utfallsrummet $S = \{x \text{ valdes} : x \in U\}$ och så kan vi införa de olika hypoteserna som ska användas i lagen om total sannolikhet så att

A = händelsen att den invånare som valdes ingår i grupp A,
B = händelsen att den invånare som valdes ingår i grupp B och
C = händelsen att den invånare som valdes ingår i grupp C.

(Här använder vi samma bokstav för att beteckna händelsen att en invånare valdes från en grupp som vi använder för att beteckna själva gruppen, annars blir det så många bokstäver.)

Mängderna $\{A, B, C\}$ partitionerar U så händelserna A, B, C partitionerar utfallsrummet S så vi kan använda lagen om total sannolikhet och införa händelsen D som innebär att invånaren som är vald har mer än 100000 kronor i besparingar. Vi får nu enligt lagen

$$P(D) = P(D|A)\cdot P(A) + P(D|B)\cdot P(B) + P(D|C)\cdot P(C)$$

och om vi sätter in de olika sannolikheterna som är givna i problemformuleringen få vi

$$P(D) = 0.70\cdot 0.20 + 0.40\cdot 0.50 + 0.10\cdot 0.30 = 0.14 + 0.20 + 0.03 = 0.37 = 37\%.$$

I summan med de tre termerna ser vi hur de olika grupperna A, B, C bidrar till den slutliga sannolikheten. Tydligen bidrar grupp A med 14%, grupp B bidrar med 20% och grupp C bidrar med 3% till den totala sannolikheten 37% i samhället att en slumpvis vald invånare har besparingar på mer än 100000 kronor.

Det är värt att studera summan

$$0.70\cdot 0.20 + 0.40\cdot 0.50 + 0.10\cdot 0.30$$

i detalj. Denna summan blir ju $P(D)$ enligt utredningen ovan och att de tre hypoteserna $\{A, B, C\}$ utgör en partitionering av S avspeglas av att summan av talen 0.20, 0.50 och 0.30 är 1. Det betyder att A, B, C bidrar till summan $0.70 \cdot 0.20 + 0.40 \cdot 0.50 + 0.10 \cdot 0.30$ proportionellt mot hur stora A, B, C är. B bidrar mest, eftersom det är en största gruppen (50%) men A bidrar också eftersom A har en stor andel invånare som nå upp till mer än 100000 kronor i besparingar. Så det är värt att betrakta den här summan ett tag och förstå hur den är uppbyggd.

Bevis av lagen om total sannolikhet: Eftersom $\{H_1, \ldots, H_n\}$ är en partitionering av S kan vi skriva

$$P(A) = P(A \cap S) = P(A \cap (H_1 \cup \ldots \cup H_n)) = P((A \cap H_1) \cup \ldots \cup (A \cap H_n)) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap H_k)$$

där sista likheten fås från egenskapen att $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ använt på flera mängder: $A \cap H_1, \ldots, A \cap H_n$. Men nu behöver vi bara använda definitionen av betingad sannolikhet för att skriva $P(A \cap H_k) = P(H_k) \cdot P(A|H_k)$ och så följer

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap H_k) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)$$

vilket skulle bevisas.

Slutligen ska vi studera en sats som kommer till användning då vi vill vända på en betingning. Som nämnt ovan gäller ju $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$ men denna formel är ju symmetrisk i A och B så vi kan lika gärna skriva $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ vilket innebär att vi har

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

så att vi får

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{respektive} \quad P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

och många gånger räcker det här för att kunna utföra de beräkningar vi är intresserade av. Det finns dock en kraftfullare variant som heter Bayes Sats som vi formulerar nu.

Bayes Sats: Låt S vara ett sannolikhetsrum med sannolikhetsfunktion P och låt $\{H_1, \ldots, H_n\}$ partitionera S. Låt vidare $A \subset S$. Då gäller, för alla $i = 1, \ldots, n$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)}.$$

Bevis: Händelserna H_i och A uppfyller förstås

$$P(H_i|A) \cdot P(A) = P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

som alla andra händelser och om vi dividerar båda led med $P(A)$ får vi

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}.$$

Men nu använder vi lagen om total sannolikhet på $P(A)$ och partitionerar med hjälp av $H_1, \ldots, H_n$, det ger oss att $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)$ och detta insatt i ekvationen ovan ger oss

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)}$$

och detta är vad som skulle visas.

Vi kan nu använda Bayes Sats för att vända på frågeställningar. Ovan hade vi ett exempel med invånare i ett samhälle uppdelat i tre grupper A, B, C där vi hade infört händelserna

A = personen som väljs tillhör grupp A (och har mer än 400000 kr i årslön),
B = personen som väljs tillhör grupp B (och har 200000 kr – 400000 kr i årslön),
C = personen som väljs tillhör grupp C (och har mindre än 200000 kr i årslön) och
D = personen som väljs har mer än 100000 i sparade pengar.

Med hjälp av lagen för total sannolikhet kunde vi beräkna sannolikheten att en slumpvis vald person hade med än 100000 kronor i sparade pengar. Med Bayes Sats kan vi dock beräkna sannolikheterna

$$P(A|D) \quad P(B|D) \quad P(C|D)$$

som alltså är sannolikheten att en innevånare tillhör en viss samhällsgrupp (A, B, C) givet att hen har ett sparkapital större än 100000. Vi beräknar dessa sannolikheter.

Om vi bara formulerar Bayes Sats för beräkning av $P(A|D)$ i det specifika exemplet så har vi

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)}$$

vi kan utveckla nämnare $P(D)$ med lagen för total sannolikhet (som Bayes Sats egentligen är formulerad) men det går lika bra att bara låta $P(D)$ stå kvar i nämnaren. Om vi sätter in värdena $P(D|A) = 0.70$, $P(A) = 0.20$ och $P(D) = 0.37$ så får vi

$$P(A|D) = \frac{0.70 \cdot 0.20}{0.37} = 38\%.$$

Om vi träffar en innevånare i detta samhälle med mer än 100000 kronor i besparingar är det alltså 38% chans att hen kommer från grupp A. Vi gör motsvarande för B och får

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D)} = \frac{0.40 \cdot 0.50}{0.37} = 54\%$$

och motsvarande beräkningar för grupp C får utseendet

$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)} = \frac{0.10 \cdot 0.30}{0.37} = 8\%.$$

Så även fast befolkningen i grupp C utgör 30% av befolkningen är det ändå bara 8% chans att en person som väljs ut med besparingar mer än 100000 ska tillhöra grupp C. Det är ju förstås en effekt av att innevånarna i grupp C inte har så stora besparingar.

Övningar

9.5.1 Om vi kastar två tärningar, vad är sannolikheten att summan är jämn givet att summan är större eller lika med 10? Använd formeln för betingad sannolikhet för att lösa problemet.

9.5.2 Om vi singlar ett mynt tre gånger, vad är sannolikheten att två singlingar i rad är krona givet att det blir ett jämnt antal krona?

9.5.3 Antag att en student svarar på en tentamen som består av tre frågor. Frågorna berör olika ämnesområden och studenten har sådana kunskaper att hen med 90% sannolikhet svarar rätt på fråga 1, 80% sannolikhet svarar rätt på fråga 2, 70% sannolikhet svarar rätt på fråga 3. Vad är sannolikheten att studenten svarar rätt på precis två av frågorna? Händelserna att studenten svarar rätt på olika frågor är oberoende av varandra. (Övningen tillhör nästa avsnitt.)

9.5.4 Från en vägskylt med texten "UPPSALA" faller två bokstäver slumpvis ner (det är lika stor sannolikhet för alla bokstäver att falla ner). En apa (som absolut inte kan någonting om bokstäver) sätter upp bokstäverna igen och de råkar hamna rättvända. Men vad är sannolikheten att skylten återigen visar texten "UPPSALA"?

9.5.5 För de tre händelserna A, B, C gäller

$$P(A \cap B \cap C) = 0.1, \qquad P(A) = 0.5, \quad \text{och} \quad P(B|A) = 0.4.$$

Beräkna $P(C|A \cap B)$.

9.5.6 I någon form av industriell produktionsprocess testas de producerade enheterna för att se om de är defekta. En defekt enhet klassificeras som defekt med sannolikheten 0.9 och en korrekt enhet klassificeras som korrekt med sannolikheten 0.85. 10% av enheterna är defekta. Beräkna sannolikheten att en enhet verkligen är defekt givet att klassificeringen anger att den är defekt.

9.5.7 I en specifik riskgrupp av patienter testas individer för en vissa sjukdom S. En person som har sjukdomen får korrekt diagnos (av testet) med sannolikheten 0.99 medan en person som inte har sjukdomen diagnostiseras som frisk (av testet) men en sannolikhet av 0.95. Vi vet också att 6% av personerna i gruppen som testas kommer att få diagnosen S av testet. Beräkna

a) Andelen personer i gruppen som har sjukdomen S och
b) sannolikheten av att en person som får diagnosen S av testet verkligen bär på sjukdomen S.

9.5.8 Du singlar tre mynt.

a) Vad är sannolikheten att du får minst två krona?
b) Vad är sannolikheten att du får två krona givet att du råkar se att ett av utfallen är klave? (Alla mynt kanske skulle kastas på ett bord där du inte ser resultaten, men ett mynt kanske ramlade av bordet så att du såg dess resultat.)

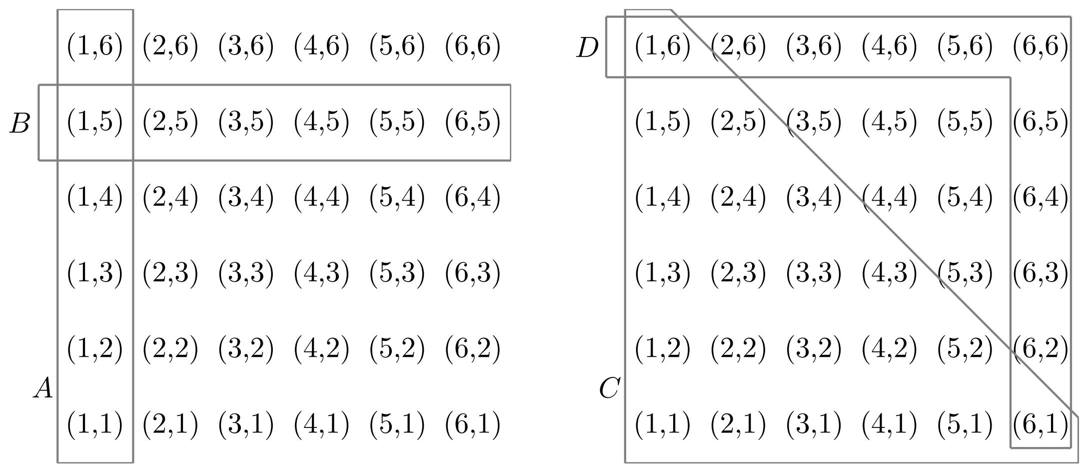
9.5.9 Tre personer A, B och C är olika skickliga på att utföra en uppgift, X. Sannolikheten att A klarar X är 0.90, sannolikheten att B klarar X är 0.80 och sannolikheten att C klarar X är 0.70. Vi vet inte vem som kommer att försöka utföra uppgiften X men det är 25% att det blir A som försöker, 30% chans att B försöker och 45% chans att C försöker. Det är bara en av A, B, C som försöker.

a) Beräkna sannolikheten att uppgiften blir korrekt genomförd.
b) Beräkna sannolikheten att uppgiften inte blir korrekt genomförd.
c) Om uppgiften blir korrekt genomförd, beräkna sannolikheten att det var A som genomförde den.
d) Om uppgiften blir korrekt genomförd, beräkna sannolikheten att det var C som genomförde den.
e) Om uppgiften inte blir korrekt genomförd, beräkna sannolikheten att det var A som genomförde den.
f) Om uppgiften inte blir korrekt genomförd, beräkna sannolikheten att det var C som genomförde den.

6. Oberoende händelser

Två händelser A, B i ett utfallsrum S är *oberoende* om sannolikheterna för att den ena inträffar är oberoende av om den andra har inträffat eller inte. Som exempel kan vi ta kast med två tärningar, sannolikheten för att vi får en etta i första kastet är 1/6. Vi kallar detta händelsen A och konstaterar alltså att $P(A) = 1/6$. Sen studerar vi sannolikheten att vi får en femma i andra kastet och kallar den händelsen B. Sannolikheten för B är också 1/6, dvs $P(B) = 1/6$ och detta är *oberoende* av om vi fått en etta i första kastet eller inte, alltså huruvida A insträffat eller inte. Som kontrast studerar vi två händelser som inte är oberoende av varandra och två sådana händelser uppkommer om vi kastar de två tärningarna och låter ena händelsen C vara att vi får tärningssumma mindre än 8 och den andra händelsen D vara att den ena tärningen visar en sexa.

Vi kan illustrera de båda situationerna i ett diagram som ger en överblick av utfallsrummet som vi studerar.



Vi ska nu betrakta alla dessa händelser i detalj. Som läsaren troligen insett har vi infört en representation av utfallsrummen i de båda experimenten (som i tidigare liknande fall) som 36 par av heltal, där det första heltalet representerar den första tärningens resultat och det andra talet representerar den andra tärningens resultat.

I diagrammet till vänster har vi det första experimentet där vi studerar händelserna A och B och om vi tänker efter så uppfattar vi att dessa händelser måste vara oberoende av varandra, att få en etta i första kastet och att få en femma i andra kastet kan självklart inte vara beroende av varandra på något sätt. Men vi beöver också en strikt matematisk tolkning av situationen. Direkt i diagrammet till vänster kan vi avläsa följande identiteter:

$$P(A) = 1/6 \qquad P(B) = 1/6 \qquad P(A \cap B) = 1/36 \qquad P(A|B) = 1/6 \qquad P(B|A) = 1/6.$$

Att händelserna A och B är oberoende ska uppfattar som att sannolikheten för att A inträffar inte ska ha någonting att göra med om B inträffar eller inte och omvänt. Rent matematiskt kan vi med betingade sannolikheter uttrycka det så här:

$$P(A) = P(A|B) \qquad \text{respektive} \qquad P(B) = P(B|A)$$

och eftersom alla dessa är lika med $1/6$ (som vi såg ovan) så kan vi konstatera att A och B verkligen är oberoende.

Det visar sig att vi kan få en ännu mer kompakt formulering av vad det innebär att två händelser är oberoende om vi studerar likheterna $P(A) = P(A|B)$ och $P(B) = P(B|A)$ med hjälp av definitionen av betingad sannolikhet:

$$P(A) = P(A|B) \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{respektive} \qquad P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

men båda dessa likheter är ekvivalenta med $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ och det är så vi gör definitionen av oberoende händelser:

Definition: Låt A, B vara två händelser i ett sannolikhetsrum S. Med att A och B är *oberoende* menas då att identiteten

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gäller. Fler än två händelser, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kallas *oberoende* om varje sannolikhet av snitthändelser alltid är lika med produkten av sannolikheterna av de ingående händelserna.

Anmärkning: Den sista delen av definitionen av oberoende säger alltså att om till exempel tre händelser, A, B, C, ska vara oberoende så måste samtliga likheterna

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(B \cap C) = P(A) \cdot P(C), \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

gälla, *men* vi måste också särskilt kräva att likheten

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

gäller, denna senare likhet *följer inte säkert* av att de förra tre är uppfyllda, så vi får se kravet på oberoende som att vi alltid ska kunna beräkna sannolikheten av *varje* möjlig snitthändelse som en produkt av sannolikheten av de ingående händelserna och att kravet är att det ska kunna möbleras om hur som helst, vi ska till exempel kunna skriva

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B \cap D) \cdot P(C) = P(A \cap D) \cdot P(B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$$

och kravet på "oberoende" blir alltså ganska strängt om vi involverar många händelser.

När vi har ett utfallsrum med likformigt sannolikhetsmått (alla utfall lika sannolika) så kan vi tolka figuren över utfallsrummet geometriskt och tolkningen är då att sannolikheten för en händelse proportionell mot arean av det område i utfallsrummet som händelsen (med alla dess utfall) omfattar. Vid tärningskasten som modelleras med de 36 talparen $(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)$ har varje utfall sannolikheten $1/36$ och arean av det område som ett utfall täcker är just talet $1/36$ och vi ser här att arean av de områden som händelserna A och B täcker är vardera $1/6$. Vidare är arean av händelsen $P(A \cap B)$ lika med $1/36$ som mycket riktigt är $1/6 \cdot 1/6$ och med areatolkningen uppfattar vi $1/36$ som $1/6$ *av* en $1/6$. Och här uppfattar vi alltså sannolikheter för händelser som angivelser av i hur stor del av utfallen som en vissa händelse inträffar. Oberoendet uttrycker sig då som att vi kan beräkna sannolikheten som produkten av sannolikheterna för de båda ingående oberoende händelserna precis som arean av en rektangel som beräknas som produkten av längden av dess båda sidor.

Om vi nu som jämförelse betraktar händelserna C och D så kan vi först få en uppfattning om att dessa händelser *inte* är oberoende. Händelsen C var att vi får mindre än 8 i summan av tärningarnas resultat och D var att det finns minst en sexa. Återigen genom att betrakta utfallsrummet observerar vi att

$$P(C) = 21/36 = 7/12 \qquad P(D) = 11/36 \qquad P(C \cap D) = 2/36 = 1/18 \qquad P(C|D) = 2/11 \qquad P(D|C) = 2/21$$

och uppenbarligen håller inte identiteten $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$ och därmed heller inte någon av $P(C) = P(C|D)$ eller $P(D) = P(D|C)$. Om vi tänker över den situationen så kan vi också ha en förståelse för att händelserna inte är oberoende: om det är givet att vi har en tärningssumma mindre än 8 så ingår fler fall där vi har möjligheten att få en sexa än om tärningssumman är större än 8. Det framgår av studier av diagrammet över utfallsrummet.

Exempel: Två händelser A, B är oberoende om och endast om deras komplementhändelser A^c, B^c är oberoende. Vi kan visa detta genom att visa att

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

och sedan följer omvändningen av att påståendet är symmetriskt i händelserna och deras komplementhändelser.

Bevis: Vi utgår alltså från $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ och ska visa $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$. Vi har, enligt DeMorgans lag och lagen om komplementhändelsens sannolikhet att

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B).$$

Nu använder vi formeln för sannolikhet av en union ($P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$) och får detta till

$$1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B).$$

Eftersom A, B var oberoende kan detta skrivas om till $1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$ som är lika med $(1 - P(A)) \cdot (1 - P(A))$ som är precis $P(A^c) \cdot P(B^c)$ och sammantaget har vi visat

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

och eftersom omvändningen följer av att låta A^c ta rollen av A och B^c ta rollen av B (påståendet är symmentriskt i händelserna och komplementhändelserna) är beviset klart.

Man kan även visa att den här satsen gäller för större antal händelser men vi gör inte detta i den här framtsällningen även om vi tillåter oss att hänvisa till det resultatet. (Vi använder oss av det resultatet i beviset av nästa sats.)

Den tomma händelsen, alltså $\emptyset$ – att ”ingenting händer” – som har sannolikheten 0 är oberoende med *varje* annan händelse och även den säkra händelsen, S (alltså hela utfallsrummet). Det kan fastställas eftersom vi alltid, för alla händelser A, har de triviala identiteterna

$$0 = P(\emptyset) = P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) \cdot P(A) = 0 \cdot P(A) = 0$$

respektive

$$P(A \cap S) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(S)$$

men dessa specialfall har inte så stor användning.

I grund och botten kan vi ofta förmoda att en slumpmässig process som kan modelleras som ett urnproblem *med* återläggning, ger upphov till oberoende händelser, medan om modellen är av typen *utan* återläggning så får vi troligen händelser som inte är oberoende av varandra.

Två händelser A, B som är oberoende av varandra med $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$ kan inte vara disjunkta. Varför det? Vi kan inse att de inte kan vara disjunkta genom att om de vore de så vore $P(A|B) = 0$. Varför motsäger det $P(A) > 0$?

Då vi studerar oberoende händelser är det alltså möjligt att ersätta $P(A \cap B)$ med $P(A) \cdot P(B)$ och det underlättar i vissa beräkningar. Bland annat har vi följande sats:

Sats: Om händelserna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är oberoende pch $P(A_i) = p_i$ så är sannolikheten att minst en av dem inträffar lika med

$$1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \ldots \cdot (1 - p_n).$$

Bevis: Vi söker sannolikheten att $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ inträffar. Men det är enklare att beräkna sannolikheten av komplementhändelsen och sedan ta 1 minus resultatet för att få det vi söker. Alltså har vi

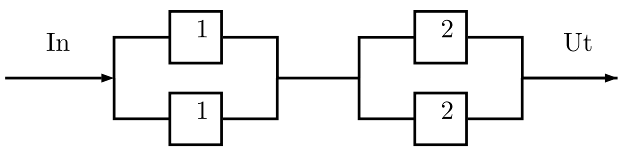
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P((A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c)$$

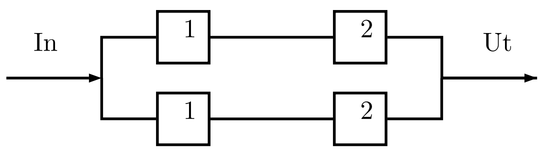
och här använder vi DeMorgans lag och skriver om detta till

$$1 - P(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c) = 1 - P(A_1^c) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \ldots \cdot (1 - p_n)$$

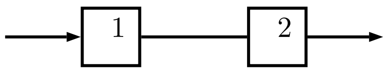
där vi också använt att om händelserna $A_1, \ldots, A_n$ alla är oberoende av varandra så blir även $A_1^c, \ldots, A_n^c$ oberoende (som vi visserligen inte visat, vi har bara visat detta för två händelser ovan, men vi tillåter oss ändå att göra så här just nu). Beviset är klart (eller nästan!)

Sannolikhetsteorin för oberoende händelser är särskilt användbar vid tillförlitlighetsberäkningar. Antag att vi har en process som ska leverera något slags funktion och att processen kan ha en av två grundläggande konfigurationer:





Processen fungerar om det finns minst en väg mellan *In* och *Ut* där det som ska levereras går genom de två komponenterna (numrerade 1 och 2) och dessa komponenter fungerar. Komponenterna fungerar med en viss sannolikhet och i båda konfigurationerna finns två komponenter av varje slag så att om en komponent inte fungerar så tar den andra över. I konfigurationen till vänster har processen en möjlighet att fungera om någon av komponenterna numrerade med 1 och 2 fungerar medan processen till höger kräver att båda komponenterna på samma rad (den övre eller den undre) måste fungera. Om vi kallar en koppling av de två komponenterna av nedanstående slag



för ett *system* så kan vi benämna den ena konfigurationen (den till höger) för *systemredundans* eftersom vi i våra överväganden om huruvida hela processen fungerar eller ej måste ta hänsyn till om ett helt system fungerar eller inte. Vi har visserligen redundans eftersom vi har två parallella system, men båda systemen har minst en felaktig komponent så fungerar inte vår process. Konfigurationen till vänster kan vi kalla *komponentredundans* eftersom vi där, för en fungerande process endast behöver att någon av komponenterna fungerar på varje rad, processen fungerar alltså om den övre komponenten med nummer 1 går sönder och den undre komponenten med nummer 2 går sönder medan konfigurationen enligt systemredundans då inte fungerar.

Vi ställer oss nu frågan, om sannolikheten att komponent 1 fungerar är p_1 och sannolikheten att komponent 2 fungerar är p_2, vad är då sannolikheterna att de olika konfigurationerna (systemredundans respektive komponentredundans) fungerar?

Sannolikheten att ett system (alltså seriekopplingen av komponenterna 1 och 2 ovan) fungerar är då p_1p_2.

Vi inför händelsen A att processen med systemredundans fungerar och inser att händelsen A kan skrivas som $B \cup C$, där B är händelsen att båda komponenter på den undre raden fungerar och C är händelsen att båda komponenter på den övre raden fungerar. Alla händelser är här oberoende av varandra så vi kan dra slutsatsen att

$$P(B) = p_1p_2 \qquad P(C) = p_1p_2$$

och med additionsformeln för sannolikheter har vi

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C) = p_1p_2 + p_1p_2 - p_1p_2 \cdot p_1p_2$$

som efter förenkling kan skrivas om till

$$p_1p_2(2 - p_1p_2).$$

Vi går vidare och söker sannolikheten för att processen med komponentredundans ska fungera. Vi inför händelsen D för detta och inför händelsen E för situationen då *någon* av de första komponenterna fungerar (alltså de med ettor på i diagrammet för komponentredundands ovan) och händelsen F för att *någon* av de andra komponenterna fungerar. Händelsen D är då precis $E \cap F$. Återigen arbetar vi med oberoende händelser så vi har sannolikheten $P(D)$, som vi söker, som vi kan beräkna som

$$P(D) = P(E \cap F) = P(D) \cdot P(F).$$

Vi behöver alltså nu hitta $P(E)$ och $P(F)$. Det visar sig lättare att studera komplementhändelserna så att

$$P(E) = 1 - P(E^c)$$

där alltså D^c blir händelsen ”ingen av första komponenterna fungerar” vilken har sannolikheten $(1-p_1)(1-p_1)$. På liknande sätt blir $P(F^c) = (1 - p_2)(1 - p_2)$ och sammantaget har vi

$$P(D) = P(E \cap F) = P(D) \cdot P(F) = (1 - P(E^c))(1 - P(F^c)) = (2p_1 - p_1^2)(2p_2 - p_2^2).$$

Sannolikheten för att processen med systemredundans fungerar är alltså $P(A) = p_1p_2(2 - p_1p_2)$ och sannolikheten för att processen med komponentredundans fungerar är $P(D) = (2p_1 - p_1^2)(2p_2 - p_2^2)$. Enligt vådiskussion ovan om att processen med komponentredundans troligen oftare fungerar borde vi kunna förvänta oss att $P(D) \geq P(A)$ det vill säga att oberoende av var p_1 och p_2 är så borde den matematiska olikheten

$$(2p_1 - p_1^2)(2p_2 - p_2^2) \geq p_1p_2(2 - p_1p_2)$$

vara uppfylld. Så är det och läsaren inbjuds i övningarna att bevisa denna olikhet. Den allmänna ingenjörsmässiga slutsatsen här är helt enkelt att ”komponentredundans är bättre är systemredundans” och här har alltså den sannolihetsteoretiska grunden för detta givits.

Övningar

9.6.1 Händelserna A, B är oberoende med $P(A) = 0.1$ och $P(B) = 0.05$. Beräkna $P(A^c \cap B^c)$. Är händelserna A^c och B^c oberoende? Varför, varför inte?

9.6.2 Låt A, B vara två händelser med positiva sannolikheter.

a) Om de är disjunkta, kan de vara oberoende?
b) Om de är oberoende, kan de vara disjunkta?

9.6.3 Vi har $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ och $P(A \cup B) = 0.6$. Avgör om händelserna A och B är oberoende eller inte.

9.6.4 Händelserna A och B är oberoende med $P(A) = 0.2$ och $P(B) = 0.3$. Beräkna

a) $P(A \cap B)$,
b) $P(A^c \cap B^c)$,
c) $P(A \cup B)$,
d) sannolikheten att exakt en (alltså inte båda) av A och B inträffar.

9.6.5 I föregående uppgift, svara med *formler* istället för siffror, till exempel är svaret på *a)*-uppgiften $P(A \cap B) = P(A) \ldots P(B) \ldots$. Formlerna får bara innehålla $P(A)$ och $P(B)$, multiplikation, addition och subtraktion.

9.6.6 De tre händelserna A, B, C är oberoende av varandra med $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$ och $P(C) = 0.3$. Beräkna

a) $P(A \cup B \cup C)$ genom att använda något som påminner om principen för inklusion och exklusion,
b) $P(A \cup B \cup C)$ genom att beräkna $1 - P((A \cup B \cup C)^c)$,
c) $P(A|B \cup C)$.

Blandade övningar

9.1 Låt A och B vara två oberoende händelser med $P(A) = 0.5$ respektive $P(B) = 0.4$. Beräkna den betiangade sannolkheten att $A \cap B$ inträffar givet att vi vet att åtminstone en av A och B inträffar.

9.2 Vi har två urnor, U_1 och U_2. U_1 innehåller tre vita och och två svarta kulor. U_2 innehåller två svarta och och två vita kulor. Vi drar en kula från U_1, utan att titta på dess färg, och lägger i U_2. Sedan drar vi en kula från U_2 och märker att den är vit. Vad är sannolikheten att den flyttade kulan var svart.

9.3 Ur en vanlig kortlek dras tre kort utan återläggning. Om de första två korten är spader, vad är sannolikheten att det tredje kortet *a)* är spader? *b) inte* är spader?

9.4 Ur en vanlig kortlek dras tre kort utan återläggning. Om de första två korten *inte* är ess, vad är sannolikheten att det tredje kortet *a)* är ett ess? *b) inte* är ett ess?

9.5 Ur en vanlig kortlek dras tre kort utan återläggning. Om det tredje kortet är ett ess, vad är sannolikheten *a)* att det finns minst ett ess bland de första två korten? *b)* att det finns exakt ett ess bland de första två korten? *c)* att det inte finns något ess alls bland de första två korten?

9.6 Två fabriker A och B framställer en viss produkt. Fabriken A är bättre än fabriken B och de enheter som kommer från A är korrekt fungerande till 99% medan de som kommer från B fungerar med 95% chans. Men fabriken B är större än A och 70% av alla enheter som framställs kommer från B.

a) Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald enhet fungerar.
b) Ledningen för företaget vill se att åtminstone 97% av alla enheter fungerar. Hur stor andel av enheterna behöver då produceras i den bättre fabriken?

9.7 Antag att vi har fyra sorters kulor i en urna, 10 blå och 10 gula. En av de blå kulorna har ett hål i sig så att den kan träs upp på en tråd och även en av de gula kulorna har ett hål så att den kan träs upp på en tråd. Vi drar en kula ur urnan.

a) Inför händelsen $A =$ ”den dragna kulan är blå” och $B =$ ”den dragna kulan har ett hål”. Är dessa händelser oberoende? Varför?

b) Nu tar vi bort hälften av de gula kulorna den med hål är kvar men vi behåller dock formuleringen av vad som utgör händelserna A och B. Egentligen har vi då ett *annat* utfallsrum. Är händelserna A och B fortfarande oberoende?