Föreläsning 11, del b

Def En funktion definierad på ett slutet intervall $[a,b]$ är en trappfunktion om det finns en indelning

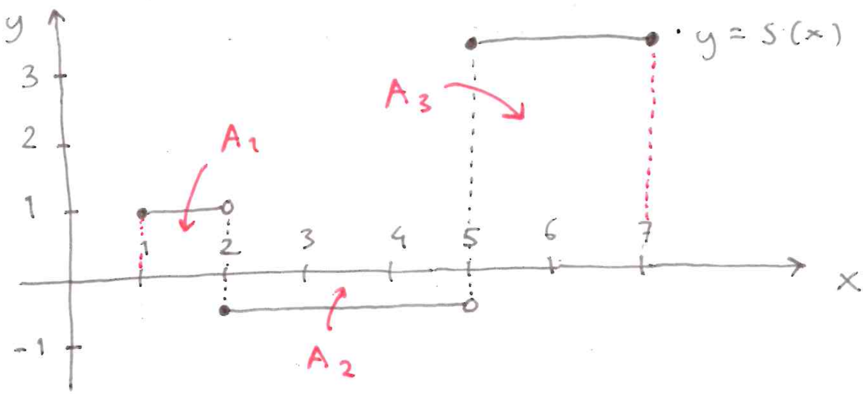
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

(för något $n \geq 1$) sådan att funktionen är konstant på varje delintervall $[x_{k-1}, x_k)$.

Ex Funktionen $s : [1, 7] \to \mathbb{R}$ definierad genom

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 1 \leq x < 2 \\ -1/2 & \text{om } 2 \leq x < 5 \\ \pi & \text{om } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

är en trappfunktion med graf:



För en trappfunktion $s(x)$ definierad på ett slutet intervall $[a,b]$ med indelningen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ inför vi beteckningen

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

och kallar denna summa för (den bestämda) integralen av $s(x)$ från a till b

---

Ex För trappfunktionen $s : [1, 7] \to \mathbb{R}$ i förra exemplet har vi

$$\int_1^7 s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{3} s(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= s(1)(2-1) + s(2)(5-2) + s(7)(7-5) =$$

$$= 1 \cdot 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 3 + \pi \cdot 2 = 1 - \tfrac{3}{2} + 2\pi = 2\pi - \tfrac{1}{2}$$

Låt A_k vara arean av rektangeln som begränsas av linjerna $x = x_{k-1}$ och $x = x_k$, funktionsgrafen och x-axeln.

Då har vi: $\int_1^7 s(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$