Matematik
Chalmers tekniska högskola 2018-04-05

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, ankn 5325 Plats och tid: SB Multi, 14:00-18:00
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

S V A R och L Ö S N I N G A R

---

1 En kvadratisk matris $\boldsymbol{M}$ sådan att $\boldsymbol{M}^k = \mathbf{0}$ för något heltal $k > 0$ kallas nilpotent.

(a) Låt (3p)

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Visa att $\boldsymbol{M}$ är nilpotent.

(b) Bestäm determinanten för $\boldsymbol{M}$ i (a)-uppgiften. (2p)

(c) Låt $\boldsymbol{M}$ vara en $n \times n$ nilpotent matris. Bestäm determinanten för $\boldsymbol{M}$. Motivera ditt svar. (4p)

(a)

$$\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{M}^3 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Svar: 0.

(c) Determinanten blir alltid 0 eftersom $0 = \det(\mathbf{0}) = \det(\boldsymbol{M}^k) = \det(\boldsymbol{M})\det(\boldsymbol{M})\ldots\det(\boldsymbol{M})$.

---

2 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Svara på följande tre frågor. Motivera dina svar noggrant.

(i) Bestäm en nollskild vektor i nollrummet för $\boldsymbol{A}$ (3p)

(ii) Bestäm en vektor i kolumnrummet för $\boldsymbol{A}$ (3p)

(iii) Bestäm rangen för $\boldsymbol{A}$. (2p)

(b) Låt $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ vara de två första kolumnvektorerna i $\boldsymbol{A}$ ovan. Bestäm $\boldsymbol{v}_2$ om (3p)

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 \text{ och } \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1$$

(c) Låt $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ vara två godtyckliga kolumnvektorer. Och låt (4p)

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 \text{ och } \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1$$

Visa att $\boldsymbol{v}_1$ är ortogonal mot $\boldsymbol{v}_2$.

(a) (i) Lös ekvationen $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dvs. $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} -7/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$. Låt tex. $t = 2$, vi får $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ som ligger i nollrummet för $\boldsymbol{A}$.

(ii) En vektor som är linjärkombination av vektorerna i $\boldsymbol{A}$, tex $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -11 \end{bmatrix}$ eftersom

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -11 \end{bmatrix}$$

(iii) Rangen = 2

(b) Vi har $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 14$,

$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 14$ och $\boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{14}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^T(\boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{a}_1^T(\boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1^T(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1\frac{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1}) =$
$\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1\frac{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1} = \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 = 0$

---

3 Låt π vara planet $x - y + 2z = 0$.

(a) Bestäm en normalvektor av längd 1 till planet. (1p)

(b) Låt (3p)

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T$$

där $\boldsymbol{I}$ är 3×3 identitetsmatrisen och $\boldsymbol{n}$ 3×1 är 3×1 normalvektor av längd 1 till planet π ovan. Beräkna $\boldsymbol{Q}$.

(c) Bestäm egenvärden och egenvektorer till $\boldsymbol{Q}$. (5p)

(a) $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} =$

$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(c) Om $\boldsymbol{u}$ är en vektor i planet π, så är $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, dvs. $\boldsymbol{u}$ är en egenvektor med egenvärdet 1. Det finns 2 linjärt oberoende vektorer som är ortogonala mot $\boldsymbol{n}$, så egenvärdet har multiplicitet 2 (dvs. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$).
Det gäller att $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{n} - 2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} - 2\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}$. Dvs. $\lambda_3 = -1$ med egenvektorn $\boldsymbol{n}$.
(Man kan förstås också ställa upp karakteristiska ekvationen och bestämma egenvärden och egenvektorer på vanligt sätt).

---

4 Låt $l_1 = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ och låt π vara planet $x - y + 2z = 1$

(a) Ligger linjen i planet π ? (Motivera ditt svar). (3p)

(b) Är linjen parallell med planet? (motivera ditt svar). (3p)

(c) Bestäm kortaste avståndet mellan planet och linjen. (2p)

(a) Nej linjen ligger inte i planet. Tex. punkten $(0, 1, -1)$ ligger på linjen men inte i planet.

(b) Nej, linjens riktningsvektor är inte ortogonal mot planets normalvektor.

(c) Punkten $(1, 0, 0)$ ligger både på linjen och i planet. Så avståndet är 0.

5 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Är $\boldsymbol{A}$ ortogonal? (Motivera ditt svar). (2p)

(b) Visa att om $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är två ortogonala matriser, så är även $\boldsymbol{AB}$ en ortogonal matris. (4p)

(c) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara en linjär avbildning med $\boldsymbol{A}$ som avbildningsmatris. Vilken vektor avbildas på $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$? (3p)

(a) Nej, ty $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{I}$.

(b) $(\boldsymbol{AB})^T(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{IB}^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$

(c) Lös $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{v}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right]$$

Svar: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ avbildas på $\boldsymbol{v}$.