Föreläsning 3, del c

Def En <u>aritmetisk serie</u> är en serie där följden av termer är en aritmetisk talföljd. En <u>geometrisk serie</u> är en serie där följden av termer är en geometrisk talföljd.

Anta att den aritmetiska serien

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots$$

är konvergent. Då gäller, enligt satsen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\left(a_1 + (n-1)d\right) = 0$$

$$\iff a_1 = d = 0$$

Den enda konvergenta aritmetiska serien är alltså

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

Ganska tråkig!

Geometriska serier är roligare!

Sats Den geometriska serien $(a_1 \neq 0)$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots$$

är konvergent om och endast om $-1 < q < 1$ $(\iff |q| < 1)$ och summan är då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \dfrac{a_1}{1-q}$

Bevis

- Om $|q| \geq 1$: $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{q} q^n \neq 0$$

$\Rightarrow$ serien är divergent enligt förra satsen!

- Om $|q| < 1$: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \to$$

$$\to a_1 \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \text{ då } n \to \infty.$$

$\square$