Föreläsning 4, del d

Sats Låt f och g vara kontinuerliga funktioner och låt k vara en konstant.

Då gäller följande <u>integreringsregler</u>:

① $$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

② $$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

(Obestämda integraler är alltså <u>linjära</u>.)

Bevis Låt F och G vara primitiva funktioner till f respektive g.

① $D(F(x)+G(x)) = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$

② $D(kF(x)) = kF'(x) = kf(x)$

Alltså är $F+G$ en primitiv funktion till $f+g$ och kF är en primitiv funktion till kf.

$\square$

Ex Beräkna integralen

$$\int \left(\sqrt{2x} - \frac{5}{x^2}\right) dx$$

Med hjälp av lineariteten och reglerna för $\int x^p\,dx$ för alla $p \in \mathbb{R}$ får vi

$$\int \left(\sqrt{2x} - \frac{5}{x^2}\right) dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{x}\,dx - 5\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int x^{1/2}\,dx - 5\int x^{-2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,x^{1/2+1} - 5\,\frac{1}{-2+1}\,x^{-2+1} + C =$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{2}{3}\,x\,x^{1/2} - 5(-1)\,x^{-1} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x\sqrt{x} + \frac{5}{x} + C.$$

Observera att vi inte behöver skriva ut en integrationskonstant för varje integral - de är båda inbakade i C.